Antecedentes y surgimiento de la integral acorde a Leibniz

Efraín Soto Apolinar
y
Juan Antonio Alanís Rodríguez

Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus Monterrey,
Ave. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, 64849
Col. Tecnológico, Monterrey, Nuevo León, México
efrain@aprendematematicas.org.mx;
juan.antonio.alanis@itesm.mx

RECIBIDO: *10 de septiembre de 2013*
ACEPTADO: *11 de abril de 2014*

RESUMEN

Se realiza un análisis del desarrollo histórico de ideas que permiten una reconstrucción del concepto de *integral definida de funciones de una variable*. Se destacan algunas implicaciones didácticas que se sugiere considerar para el diseño de nuevas propuestas de la enseñanza de dicho concepto. De esta manera, este análisis sirve como fundamento epistemológico para una propuesta de la enseñanza del mencionado concepto matemático.

PALABRAS CLAVE

Cálculo infinitesimal, historia del Cálculo, Integral definida, Leibniz.

Contenido

1. Introducción

Este trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de innovación en la enseñanza del Cálculo. El análisis que a continuación se presenta es una parte de la indagación que busca crear la construcción potencial de la definición del concepto de integral definida de funciones de una variable acorde al acercamiento leibniziano. El recorrido histórico que se realiza está dividido en cinco periodos: (a) empírico-práctico, correspondiente al periodo pre-euclídeo; (b) de la antigua Grecia, correspondiente al periodo euclídeo; (c) periodo de avances durante los siglos XI y XVI; (d) previo al nacimiento de la *integral*, y (e) nacimiento de la integral acorde a Leibniz. La consideración de tratar a las curvas en intervalos infinitamente pequeños como segmentos de recta es a lo que en este trabajo se denomina *principio leibniziano*.

2. Problemática

Diversos investigadores han reportado problemas en la comprensión del concepto de integral de funciones de una variable (Artigue, 2002; Chappel y Kickpatrick, 2003; Cordero, 2003; Hoban, Finalnson y Nolan, 2012; Muñoz, 2000 y 2003). Con la intención de aliviar en cierta medida estos problemas, ha surgido una gran cantidad de propuestas de innovación en la enseñanza del Cálculo. Contrario a lo que debería esperarse, muchas de estas propuestas no han considerado los resultados de investigaciones en Matemática educativa (Robert y Speer, 2001). Eso explica, al menos en parte, por qué los resultados de dichas propuestas no han sido satisfactorios (Steen, 2003; Thompson, Byerley y Hatfield, 2013).

De acuerdo con Bergé y Sessa (2003), los estudios de corte histórico son de utilidad en Matemática educativa, al menos por tres razones: (1) permiten estimar la complejidad de los objetos matemáticos de interés (lo cual amplía las concepciones epistemológicas), (2) aumentan la posibilidad de interpretación de conductas y respuestas del estudiante y (3) proveen de materia prima para el diseño de una problematización adaptada al aula. Las ideas en que se basa el análisis histórico que aquí se presenta fueron seleccionadas con el fin de reconocer puntos claves que parecen haber facilitado la construcción de la integral definida, y se espera que faciliten la comprensión de ese concepto matemático a los estudiantes cuando se apliquen durante la instrucción.

Periodo empírico-práctico (pre-euclídeo)

El cálculo de áreas, superficies y volúmenes fue una línea de investigación que motivó el esfuerzo de muchos matemáticos a lo largo de la historia.

Contenido

Las estrategias utilizadas para la resolución de dichos problemas en sus inicios no están del todo claras en los primeros registros. Entre esos primeros esfuerzos se encuentran los llevados a cabo por los babilonios, quienes en su intento por calcular el área del círculo utilizaron la aproximación $\pi \approx 3$; esto es (en términos actuales), calculaban el área del círculo con la fórmula: $A = 3 \cdot r^2$. Edwards (1979) interpreta esta aproximación como el promedio de las áreas de los cuadrados inscrito y circunscrito al círculo.

Una mejor estimación para el cálculo del área del círculo se encuentra en el problema 48 del *Papiro de Rhind*. La estimación se obtiene al comparar el área de un círculo de 9 unidades de diámetro y el octágono construido sobre un cuadrado circunscrito al referido círculo. Burton (2010) indica que en dicho papiro el problema 48 incluye una figura que consistía en un octágono inscrito en un cuadrado de 9 unidades de lado y que esta construcción permitió aproximar el valor del área del círculo inscrito al mismo cuadrado. Lo que aparentemente realizó el escriba es dividir cada lado del cuadrado en tres partes iguales, y luego dividió el cuadrado en nueve partes iguales, como se muestra en la figura 1. Al omitir la mitad de un noveno en cada esquina del cuadrado inicial, obtuvo un octágono cuya área corresponde a una aproximación al área del círculo. La estrategia empleada —aproximar el área de una curva con el uso de una figura de lados rectos— surge al advertir que el área del círculo, a simple vista, es aproximadamente igual a la del octágono. Esta observación —el parecido visual de ambas figuras— también sirvió para justificar su aplicación.

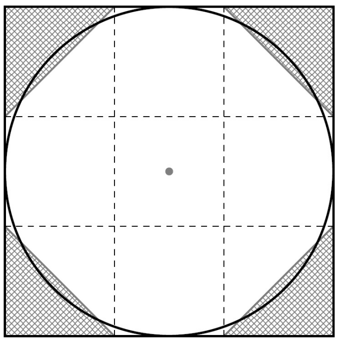

FIGURA 1. Representación geométrica de la aproximación de los egipcios a la cuadratura del círculo.

En el problema 50 del papiro de Rhind también se calcula el área de un campo circular con un diámetro de 9 jets. En su resolución se explica el algoritmo paso a paso, por medio del cálculo aritmético: “Resta un noveno del diámetro; el resto es 8. Multiplica 8 por 8; obtienes 64. Por tanto, tiene 64 setat de tierra” (Clare, 1927, pág. 92). El algoritmo utilizado consiste en sustraer un noveno del diámetro y calcular después el cuadrado del resultado. Esto equivale a aproximar el número π con $4 \cdot (8/9)^2 \approx 3.1605$.

En lo que respecta al cálculo de volúmenes, en el problema 14 del *Papiro de Moscú* se exponen los pasos para el cálculo de la pirámide truncada de base cuadrada. Para la resolución de este problema se describen los pasos correspondientes al algoritmo del cálculo aritmético, de acuerdo con la fórmula: $V = h(a^2+b^2+ab)/3$, respetando la prioridad de las operaciones: elevar al cuadrado 2 y 4, multiplicar 2 por 4, sumar los resultados anteriores, multiplicar el resultado anterior por un tercio de 6. Así se determina que el volumen de este cuerpo geométrico, mostrado en la figura 2, es de 56 unidades.

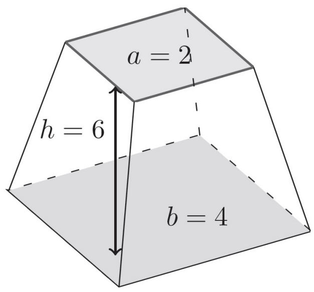

FIGURA 2. Representación geométrica del problema 14 del papiro de Moscú.

Cabe mencionar que estos resultados parecen haber sido obtenidos por la experiencia o por el método de prueba-error, sin la generalización que da el lenguaje algebraico; no se evidencia estrategia alguna o heurística que permitiera resolver más problemas del mismo tipo. Debido a que no se utilizaban literales para representar magnitudes, la resolución de estos problemas no da indicios de fórmulas. Tampoco se utilizan indivisibles, infinitesimales, límites o estrategia similar. El conocimiento matemático de este periodo solamente les permitió resolver problemas a través de un ejemplo particular. Con todo, el cálculo del volumen de la pirámide truncada se realiza de manera exacta. No ocurrió así en el caso del cálculo del área del círculo, donde obtuvieron solamente aproximaciones.

Periodo de la antigua Grecia (euclídeo)

Respecto del periodo correspondiente a la antigua Grecia, se cree que Antifón de Atenas, el sofista, fue uno de los primeros que abordaron la cuadratura del círculo (Heath, 1921). Su estrategia consistió en inscribir un cuadrado en una circunferencia, y sobre cada uno de sus lados trazar triángulos isósceles, obteniendo de esta manera un octágono regular inscrito. Duplicando el número de lados cada vez, obtuvo una serie de polígonos regulares inscritos cuyas áreas se aproximan cada vez mejor a la del círculo. Antifón suponía que el área del círculo podría ser cubierta totalmente, y en alguna iteración del proceso obtendría un polígono que, debido al tamaño tan pequeño de la longitud de su lado, coincidiera con la circunferencia resolviendo de esta manera el problema de cuadrar el círculo.

Con un acercamiento semejante al empleado por Antifón, Hipócrates observó que al inscribir dos polígonos regulares semejantes en dos circunferencias, si se aumenta el número de lados de cada polígono, su área agotará la del círculo correspondiente. También justificó que la razón de las áreas de dos polígonos regulares inscritos en dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de sus radios (Edwards, 1979; Merzbach y Boyer, 2011). Combinando ambos resultados, se deduce que la razón de las áreas de círculos es igual a la de los cuadrados de sus radios. Cabe mencionar que Hipócrates solamente encuentra el resultado sin lograr demostrarlo rigurosamente.

Respecto al volumen, se pueden mencionar dos hechos. Primero: Demócrito encuentra que el volumen de una pirámide es igual a un tercio del área de su base por su altura. A partir de este resultado, al observar que al aumentar el número de lados de la base de una pirámide se tiende al cono, pudo deducir —sin llegar a demostrarlo rigurosamente— que el volumen del cono es igual a un tercio del área de su base por su altura. Segundo: Hipócrates redujo el problema de la duplicación del cubo al de encontrar dos medias entre un segmento de línea recta (a) y otro de doble longitud ($2a$). Considerando como x y y a esas medias, entonces (Rouse, 1908), $a : x = x : y = y : 2a$, de donde: $x^3 = 2a^3$.

Más tarde, con el origen de la matemática como cuerpo de conocimiento sistemático y deductivo en la antigua Grecia, se abandonaron estos acercamientos con base en aproximaciones y justificaciones no rigurosas.

Los Elementos de Euclides es la obra que marca la frontera entre las justificaciones no rigurosas de las demostraciones rigurosas, lo cual permitió profundizar en el conocimiento que se tenía de las cantidades geométricas. En esa obra se asume que cualquier magnitud puede ser dividida en tantas partes como se quiera. En efecto, la Proposición I dada en el libro X de *Los Elementos* de Euclides afirma:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Tal principio es la base en la que descansa el *método de exhaución* el cual es atribuido a Eudoxo. Este método consiste en la inscripción de una figura cuya área se desea calcular en una sucesión de polígonos, construidos de tal manera que sus áreas converjan a la de la figura dada, conforme el número

Contenido

de lados aumenta. Este método, apoyado en la reducción al absurdo, elevó el nivel de los resultados matemáticos obtenidos a través de ellos al de demostración (rigurosa). En seguida se mencionan algunos problemas que fueron resueltos con este método.

En el lema de la proposición 2 del libro X de *Los Elementos*, aplicando el acercamiento de Antifón, Euclides demuestra que el cuadrado inscrito tiene mayor área que la mitad del círculo, y a su vez que el área del octágono regular inscrito es mayor que la mitad del área del círculo que queda sin cubrir por el cuadrado inscrito, y supone que este patrón se cumple siempre que se duplica el número de lados. Con esto concluye que, si el proceso se replica un número de veces suficientemente grande, quedará sin cubrir un área menor a cualquier área dada (Fitzpatrick, 2007).

También en la proposición 2 del libro XII de *Los Elementos*, Euclides utiliza el método de exhaución para demostrar que la razón de las áreas de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de sus diámetros. Este resultado permitió resolver problemas del cálculo del volumen de pirámides, de interés en este trabajo.

Arquímedes estuvo muy involucrado en la resolución de problemas de cálculo de longitud de curvas, áreas de regiones del plano y volúmenes. Respecto de la cuadratura del círculo, en la Proposición I de su tratado titulado *Medición del Círculo* (Heath, 1897, pág. 92), afirmó:

> El área de cualquier círculo es igual a un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados que forma el ángulo recto es igual al radio y el otro lado igual a la circunferencia del círculo.

Arquímedes demostró esta proposición usando el método de exhaución. Ahí logró convertir un problema de cuadratura en uno de rectificación. En la proposición 3 de su tratado *Medición del círculo*, hace una aproximación a la rectificación de la circunferencia.

Arquímedes también inventó un método mecánico (de la balanza) que le permitía encontrar resultados geométricos y que después demostraba por el método de exhaución. Así, por medio del método de la balanza, encuentra que "el área de cualquier segmento de parábola es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura que el segmento parabólico" (Heath, 1897, pág. 246). Este resultado fue dado en la proposición 17 de su tratado *Cuadratura de la parábola* y es demostrado con base en una serie geométrica en la proposición 24 del mismo.

La exhaución del segmento parabólico por medio de triángulos sugiere el uso de un polígono de una gran cantidad de lados que cubra el área de la curva cuya cuadratura se desea conocer. En efecto, en la proposición 20 del mencionado tratado, Arquímedes demuestra que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico (con la misma base y la misma altura) es mayor que la mitad del área del segmento parabólico, y de este resultado infiere el siguiente corolario: "es posible inscribir en el segmento (de parábola) un polígono tal que el área de los segmentos (de parábola) que quedan fuera son, juntos, menores que cualquier área asignada" (Heath, 1897, pág. 248). Evidentemente, al menos en las proposiciones 20 a 24 del tratado *Cuadratura de la parábola*, Arquímedes se aproximó al segmento parabólico bajo estudio por medio de un polígono de un número muy grande de lados, con todos sus vértices sobre la parábola.

Para el cálculo del área superficial de una esfera, Arquímedes inscribe un polígono regular de un número par de lados en un círculo. Al hacer girar el círculo alrededor de uno de sus diámetros (con extremos en dos vértices del polígono inscrito), observa que el área superficial de la esfera puede ser aproximada calculando la superficie generada por el polígono inscrito que gira, el cual produce una serie de conos truncados y dos conos en los extremos del diámetro sobre el que gira. Al aumentar el número de lados de este polígono, la cantidad de conos truncados generados debido a su rotación aumenta, y la suma de sus áreas resulta cada vez en una mejor aproximación del área superficial de la esfera. Con esta idea, Arquímedes demuestra que el área superficial de la esfera es cuatro veces el área de su círculo más grande (Macintosh, 1995).

Periodo de avances durante los siglos XI *y* XVI *(periodo post-euclídeo)*

El cálculo de áreas y de volúmenes a partir de sus elementos infinitesimales de una manera natural conduce al uso de las series infinitas. Alrededor del siglo XI, el matemático árabe Alhazan escribió un tratado de óptica en el que incluyó algunos resultados del cálculo de volúmenes (Stillwell, 2010). Para estos cálculos utilizó algunas fórmulas de las series de cubos y cuartas potencias, las cuales dedujo por medio de un diagrama geométrico (Baron, 1969). Por los resultados mostrados, se puede afirmar que en este tratado se generalizan algunos de los resultados encontrados por Arquímedes (Edwards, 1979).

Por su parte, Simon Stevin, uno de los más importantes matemáticos e ingenieros del siglo XVI publicó dos obras: *Mecánica* e *Hidrostática*. En ellas supone que, si la diferencia de dos cantidades puede hacerse tan pequeña como se quiera, entonces éstas son iguales. Esta hipótesis le permite simplificar considerablemente el estilo arquimedeano de demostración. Así, con el fin de calcular el centro de gravedad de un triángulo, lo divide en paralelogramos, con un par de lados paralelos a un lado del triángulo, como se muestra en la figura 3.

Con base en ella, argumentaba en términos de infinitesimales (Dijksterhuis, 1955, pág. 229):

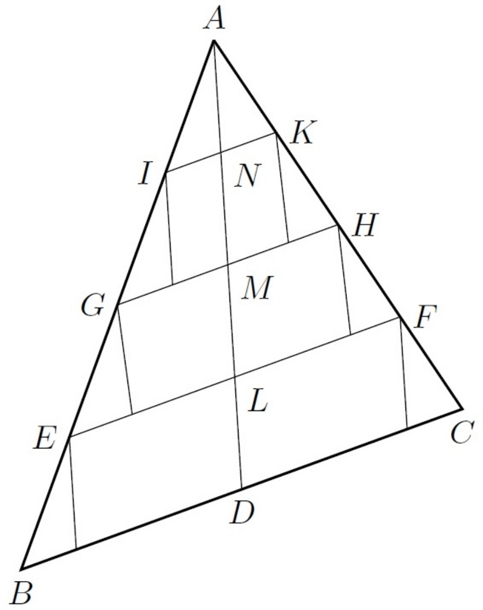

Figura 3. Construcción de Stevin para el cálculo del centro de gravedad de un triángulo.

> Ahora se muestran tres cuadriláteros que han sido inscritos en el triángulo; entonces un número infinito de tales cuadriláteros pueden ser inscritos, y el centro de gravedad de la figura inscrita siempre estará (por las razones antes mencionadas) en la línea AD. Pero mientras más cuadriláteros haya, menos diferirá el triángulo ABC de la figura inscrita de [formada por] los cuadriláteros. Porque si dibujamos líneas paralelas a BC por el punto medio de AN, NM, ML, LD, la diferencia de la última figura será exactamente la mitad de la figura previa. Podemos por tanto, por aproximación infinita, colocar dentro del triángulo una figura tal que la diferencia entre ésta y el triángulo sea menor que cualquier figura plana, no importa qué tan pequeña sea.

Con este argumento encuentra que el centro de gravedad del triángulo se ubica sobre cada una de sus medianas, esto es, el baricentro es el centro de gravedad del triángulo. También resuelve algunos problemas de la ingeniería utilizando este procedimiento. En su obra *Hidrostática*, por ejemplo, calcula la presión hidrostática total sobre una pared vertical. Para ello, divide la pared en 4, 10 y 10 000 rectángulos horizontales (Baron, 1969). Al resolver numéricamente cada caso, observa que el valor de la presión tiende a un valor fijo y que la diferencia entre este valor con el resultado de la aproximación numérica puede hacerse tan pequeña como se requiera, aumentando el número de tiras consideradas. Por tanto, concluye que la magnitud de la presión hidrostática sobre la pared es tal valor fijo.

Periodo previo al nacimiento de la integral (prototipo de la integral)

En su obra *Stereometria doliorum vinorum* (Geometría sólida de barriles de vino), Johanes Kepler detalla el cálculo de 93 distintos sólidos de revolución usando ideas precursoras del concepto de integral definida. Boyer (1949) indica que este tratado estaba dividido en tres partes: (1) estereometría arquimedeana, (2) medición de barriles de vino y (3) aplicaciones. El hecho de basarse en las ideas de Arquímedes explica, al menos en parte, por qué algunos problemas se resolvían con acercamientos parecidos a los utilizados por ese matemático de la antigüedad, aunque Kepler hizo cambios notables. En primer lugar, fue menos riguroso que Arquímedes, por estar interesado en la divulgación de los resultados, pues este tratado estaba dirigido a inspectores de medición de los barriles de vino (Barón, 1969); en segundo lugar, utilizó la idea de infinito y de número irracional, conceptos que fueron, en cierta medida, evadidos por los matemáticos de la antigüedad (Boyer, 1949).

En el primer ejemplo resuelto en ese tratado, Kepler logra cuadrar el círculo dividiéndolo en un número infinito de triángulos, con vértice común en el centro del círculo (Baron, 1969). De esta manera, al sumar el área de cada uno de los triángulos isósceles así formados, permite cuadrar al círculo de manera exacta. Para Kepler, la circunferencia es un polígono de una cantidad infinita de lados, cuyo perímetro es igual a la suma de las bases s_i de los triángulos isósceles construidos en el círculo. En la figura 4 se muestra una representación geométrica de esta idea con un número finito de triángulos.

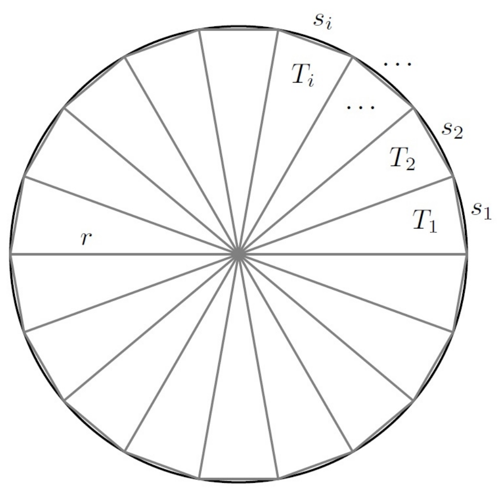

FIGURA 4. Estrategia de Kepler para calcular el área del círculo.

Al ser indistinguible este polígono con la circunferencia, la suma de las longitudes de todas esas bases es igual a la longitud de la circunferencia; matemáticamente, $C = \sum s_i = 2\pi r$. Entonces, el área A del círculo es igual a la suma de las áreas T_i de cada uno de los triángulos construidos en él:

$$A = \sum T_i = \sum \tfrac{1}{2} r s_i = \tfrac{1}{2} r \sum s_i = \tfrac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2.$$

Kepler utiliza estrategias similares en la resolución de diversos problemas de áreas y volúmenes. Por ejemplo, consideró a la esfera como formada de un número infinito de pirámides con base de área infinitamente pequeña (Kallio, 1966; Baron, 1969). Con este supuesto, al sumar todos los elementos infinitesimales de volumen deduce que el volumen de la esfera es igual a un tercio de su área superficial por su radio.

Bonaventura Cavalieri propuso el método de los indivisibles para el cálculo de áreas y volúmenes, influyendo con él a otros matemáticos que buscaban resolver el mismo tipo de problemas (Child, 1916). Cavalieri consideró a un segmento de recta como formado de puntos, a una región plana como compuesta de segmentos de recta y a los volúmenes como compuestos de superficies. Para calcular el área de una figura plana, Cavalieri la descomponía en segmentos de línea paralelos —los indivisibles u *omnes lineae* (todas las líneas)—, que ocupaban la región cuya área se deseaba conocer (Andersen, 1985). Con el uso de esta estrategia, Cavalieri logra resolver una gran cantidad de problemas. Por ejemplo, en la proposición 24 de sus *Exercitatio Prima* explica el cálculo exacto del volumen de una pirámide (Ostermann y Wanner, 2012), resultado que actualmente se denota como:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\,.$$

Gracias al método de los indivisibles, Cavalieri evade las dificultades que se encuentran en la resolución de este problema en la proposición V del Libro XII de *Los Elementos* de Euclides —en donde se utiliza el método de exhaución. También, con el uso de su método, en su obra *Geometria*, Cavalieri demostró que el volumen de un cono es igual a un tercio del volumen del cilindro que lo contiene (Bardi, 2006).

Por su parte, John Wallis combina sistemáticamente los infinitesimales con las series infinitas en su obra *Arithmetica infinitorum* (Bardi, 2006; Malet, 1996). Para calcular el área debajo de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $(0, B)$, Wallis dividió éste en $m + 1$ subintervalos de igual tamaño y los utilizó como bases de rectángulos, de manera que la suma de las áreas de los rectángulos fuera proporcional a $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + m^2$. Al notar que el área del rectángulo $OBAC$ —que encierra al área buscada— es

Contenido

proporcional a $m^2(m+1)$, sustituyó valores sucesivos para m en el cociente:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+m^2}{m^2(m+1)}.$$

Notó que a mayor número de términos, la razón se aproxima a $1/3$. *Si esto continua* ad infinitum*, la diferencia se desvanecerá completamente.* (Kallio, 1966, pág. 13). Wallis generalizó este resultado para otros valores enteros de n, justificando lo que actualmente denotamos como:

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

y aplicó luego este resultado en el cálculo de cuadraturas y de volúmenes.

Fermat también utilizó rectángulos para calcular el área bajo curvas de la forma $y = x^{p/q}$, pero en lugar de considerar particiones del intervalo de igual tamaño, consideró particiones tales que los rectángulos tuvieran área en progresión geométrica (Kallio, 1966). Con esto, logró calcular el área bajo la curva en el intervalo $(0, B)$ al sumar los elementos de área, lo cual se traduce al cálculo de una serie geométrica. Dado que consideró una cantidad infinita de rectángulos (particiones en el intervalo mencionado), obtuvo una serie infinita que coincide con la cuadratura de la curva. Fermat logró aplicar estos resultados a otros problemas, como la cuadratura de espirales. También extendió su método de pequeñas variaciones para la determinación de centros de gravedad de sólidos de revolución (Barón, 1969). La desventaja de este método consiste en que debía eliminar términos que involucraban infinitesimales de segundo orden, con lo que obtenía una aproximación de inicio, no una igualdad.

Periodo de nacimiento de la integral acorde a Leibniz

De acuerdo con Child (2005), Leibniz llegó a una concepción de lo que hoy llamamos '*integral definida*' a partir del siguiente resultado numérico, que publicó en su obra *De Arte Combinatoria*:

> Dada la sucesión de números $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, genere la sucesión de diferencias: $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$, siendo $d_i = a_i - a_{i-1}$. Entonces,
>
> $$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = a_n - a_0.$$

La integral definida de funciones de una variable surge como una aplicación de este resultado en la geometría, junto con la consideración de las curvas como líneas poligonales con una cantidad infinita de lados, cada uno de ellos de longitud infinitesimal. El proceso de integración consistía, para Leibniz, en dividir un intervalo en una sucesión con una cantidad infinita de términos, y a partir de ella generaba una sucesión de diferencias, y con ésta cuantificaba lo que deseaba calcular, aplicando el resultado numérico antes mencionado. Esto es, Leibniz concebía a la integral definida como la suma de una cantidad infinita de infinitesimales.

En *De Functionibus*, Leibniz resuelve el problema inverso de la tangente, al observar que:

> La abscisa AE debe ser concebida como dividida en un número infinito de partes iguales, como EF, FG, y éstas son, por tanto, infinitamente pequeñas. Es claro que la figura puede ser concebida como compuesta de un número infinito de trapecios como $EFHD$ y $FGKH$.

Esto es, al considerar a la curva como una poligonal de una cantidad infinita de lados, Leibniz percibe al área bajo la curva como la suma de las áreas de una cantidad infinita de trapecios de altura infinitesimal. Al respecto, Probst dice que, "mientras los paralelogramos solamente representan el área de la figura, los trapecios, cuyos lados superiores coinciden con las partes infinitamente pequeñas de la curva, y de sus respectivas tangentes, representan el área y el arco de la curva" (Probst, 2008, pág. 105).

En ese mismo tratado, Leibniz logra rectificar la parábola con el mismo acercamiento en dos pasos: primero hace una aproximación utilizando un número finito de intervalos y después obtiene el valor exacto al considerar una cantidad infinita de intervalos, cada uno de ellos infinitamente pequeño (Probst, 2008), reduciendo un problema de rectificación a uno de cuadratura, el cual ya sabía resolver.

Implicaciones didácticas

De este recuento histórico se pueden reconocer ideas que pueden utilizarse en la construcción de una propuesta de la enseñanza del concepto de integral definida de funciones de una variable. En el periodo pre-euclídeo se aproxima el valor del área de una región del plano delimitada por una curva (círculo) con base en una figura de lados rectos, visualmente parecida a la primera. En el periodo euclídeo se realiza la aproximación con una curva por medio de polígonos con una cantidad finita de lados (inscritos, circunscritos o ambos) y se observa que la aproximación se mejora conforme el número de lados del polígono crece. Más adelante, en el siglo XVI, Stevin también consideró varios casos, cada uno con un número finito y manejable de particiones del todo, antes de considerar una cantidad infinita de particiones de la magnitud que se desea cuantificar. En el siglo XVII, el uso de los indivisibles por Cavalieri y de los infinitesimales por parte de Kepler les permitió calcular áreas y volúmenes de manera exacta. Por su parte, Fermat y Wallis obtuvieron de inicio aproximaciones que, después de omitir infinitesimales de segundo orden, se redujeron a resultados exactos. Finalmente, Leibniz, al considerar a las curvas como una poligonal de una cantidad infinita de lados cada uno de longitud infinitesimal, con todos sus vértices sobre la curva considerada, logra calcular el todo que debía cuantificar.

Retomando lo mencionado por Bergé y Sessa (2003), respecto de la complejidad del concepto de integral de funciones de una variable, con base en el análisis presentado, se puede afirmar que, históricamente, las dificultades ocasionadas por la complejidad de los conceptos matemáticos sobre los cuales descansa el proceso de integración (particularmente el infinito), fueron evadidos —en cierta medida— por medio de un proceso de aproximación a la magnitud que se desea calcular, al considerar inicialmente una cantidad finita de particiones del todo. Como se mencionó en el análisis desarrollado, Antifón, Euclides, Arquímedes, Stevin, Kepler, Fermat, Wallis y Leibniz hacen como primer acercamiento al cálculo de la magnitud que desean cuantificar una aproximación, dividiendo apropiadamente al todo en una cantidad finita de partes. En seguida, observan que al aumentar la cantidad de particiones en que se divide al todo se mejora la aproximación inicial y esto les conduce a intuir que una cantidad infinita de particiones posibilita la obtención del resultado exacto.

En cuanto al potencial que dan los análisis históricos para interpretar las respuestas dadas por los estudiantes, mencionado por Bergé y Sessa (2003), se puede observar que en el periodo pre-euclídeo la estrategia empleada fue aproximar el área mediante una estimación visual o por medio de la comparación con una figura cuya área es cuantificable, y visualmente muy parecida a la que se desea calcular. Éste es un resultado que Olave (2005) reporta como una de las estrategias a la que recurren algunos estudiantes que enfrentan por primera vez el problema de calcular el área debajo de la gráfica de una función. Otras estrategias reportadas por esta autora en problemas del mismo tipo en diversas curvas son: (1) acotar el valor del área por medio de trapecios o triángulos, (2) usar particiones sobre alguno de los ejes y (3) dividir a la región en figuras cuya área se sabe calcular. A lo largo del recuento histórico aquí presentado se pueden encontrar rastros del uso de estas estrategias por distintos personajes.

Finalmente, la materia prima obtenida del análisis histórico presentado, cuya consideración podría mejorar el diseño de una problematización para la enseñanza del concepto de integral definida de funciones de una variable adecuada al aula, es la que a continuación se propone. La resolución de la problemática de cuantificación de una magnitud variable se inicia con una

Contenido

aproximación, no a través de un cálculo exacto —es decir, el proceso no se presenta con base en el infinitesimal o el infinito, sino con un número finito de divisiones apropiadas del todo a cuantificar. Esto, de acuerdo al análisis antes desarrollado, permite a quien abordaba la problemática reconocerla, al menos parcialmente, preparando el camino para la obtención del método exacto. Al observar que al aumentar el número de particiones se mejora la aproximación, intuitivamente se puede ver que el valor exacto se obtiene cuando la cantidad de particiones es infinita. La consideración de las curvas como poligonales de lados de longitud infinitesimal, con todos sus vértices sobre la curva considerada, acorde al acercamiento de Leibniz, permite dar generalidad al método de solución del problema. Esta consideración es la que permitió a Arquímedes calcular el área superficial de la esfera y a Leibniz rectificar curvas. Cuando la integral definida se introduce con base en rectángulos (en lugar de trapecios), se debe cambiar de estrategia en problemas más generales (como el área superficial de sólidos de revolución) utilizando finalmente el acercamiento leibniziano, cuando de inicio éste pudo usarse.

3. Conclusiones

El recuento de los antecedentes considerados respecto al concepto de integral definida de funciones de una variable se ha enfocado al cálculo de áreas y volúmenes, porque estos problemas permiten la elaboración del análisis de una evolución —evolución un tanto artificial, pues fue reconstruida a propósito— de aquellas ideas que, juntas, permiten explicar el nacimiento de dicho concepto matemático, acorde a la visión leibniziana. Sin embargo, no se pretende sugerir un acercamiento basado en estos únicos problemas. Por el contrario, la riqueza y la variedad de la problemtica que este concepto matemático permite abordar sugieren la consideración de muchos contextos para su adecuada construcción en los estudiantes. Esta sugerencia tiene como base los resultados reportados por Turégano (1996), quien indica que presentar el concepto de integral definida con base en la noción de área dificulta la generalización del concepto a otros contextos. Si la enseñanza de los conceptos fundamentales del cálculo se estructura con base en un conjunto de problemas que permitan la construcción de algoritmos y reglas para la resolución de problemas del mismo tipo, el estudiante tendrá mayor oportunidad de comprender el proceso que lleva a cabo cuando aplica dichos conceptos.

Para el diseño de actividades de instrucción del concepto de integral definida de funciones de una variable, de este recuento se pueden rescatar las siguientes ideas. Primero se sugiere utilizar una aproximación al resultado (a través de una comparación visual), sin el uso de los infinitesimales, dividiendo apropiadamente el todo en una cantidad finita de partes, para

Contenido

después aumentar el número de particiones. Con esto se espera que el estudiante intuya que la aproximación se mejora aumentando el número de particiones. La idea de límite puede emerger en este momento, pero aún sin considerar al infinito. Una vez que esto ha sido aprehendido, se puede extrapolar el procedimiento a una cantidad infinita de partes en que se divida al todo para su cuantificación. Debe hacerse énfasis en que la consideración de las curvas como poligonales con lados de longitud infinitesimal permite dar generalidad a la estrategia. Así, la integral definida basada en los infinitesimales surge como la herramienta que permite calcular con exactitud aquello que inicialmente solamente se podía calcular de manera aproximada. De esta manera, el concepto de integral definida emerge de los problemas mismos y éstos son su razón de ser.

Varios investigadores (Ely, 2010; Garbin, 2008; Waldegg, 2005) coinciden en que las dificultades que los estudiantes deben superar cuando estudian por primera vez los conceptos y técnicas del cálculo radican en la complejidad y abstracción de los conceptos utilizados en su construcción. Ello explica por qué, cuando se introduce el concepto de integral definida con base en el uso del infinito y de los infinitesimales, con frecuencia muchos estudiantes no logran comprender cómo de un proceso de la suma de estados de reposo —en los cuales no hay un avance real, sino infinitesimal— se obtiene un movimiento. Por otra parte, de acuerdo con Kleiner (2001), el cálculo está caracterizado por tres elementos principales: (1) un conjunto de reglas o algoritmos, (2) una teoría que explica por qué funcionan esas reglas y (3) aplicaciones, tanto de las reglas como de la teoría. Alanís y Soto (2012) indican que actualmente en la enseñanza tradicional del cálculo, se da énfasis a la teoría (enseñanza formalista) o a los algoritmos (enseñanza mecanicista) y que la noción de área es la que principalmente se utiliza para definir a la integral definida, a pesar de que este concepto matemático permite la resolución de problemas en otras disciplinas. Al considerar diversos contextos durante la instrucción bajo el acercamiento aquí propuesto, se espera que los estudiantes logren evadir (en cierta medida) las dificultades mencionadas por estos investigadores y de paso se mejore la comprensión de dicho concepto matemático, de manera que los estudiantes logren reconocer una metodología que podrán aplicar a problemas que no han abordado previamente y cuya resolución requiere de la integral definida de funciones de una variable.

4. Referencias

[1] Alanís, J.A., y E.A. Soto, "La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual", *El Cálculo y su enseñanza* **3** 1 (2012) 1–6.
[2] Artigue, M., "Analysis", en D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Press, Nueva York, EUA, 2002, pp. 167–198.

Contenido

[3] Bardi, J.S., *The Calculus Wars*, Thunders Mouth Press, Nueva York, EUA, 2006.
[4] Baron, M., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover Publications, Inc., Nueva York, EUA, 1969.
[5] Bergé, A., y C. Sessa, "Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: Aportes a una investigación didáctica", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **6** 3 (2003) 163–197.
[6] Boyer, C.B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, Inc., Nueva York, EUA, 1949.
[7] Burton, D.M., *The History of Mathematics. An Introduction* (7a. Ed.), McGraw-Hill, Nueva York, EUA, 2010.
[8] Child, J.M., *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, The Open Court Publishing Company, Londres, Inglaterra, 1916.
[9] Child, J.M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Dover Publications, Mineola, Nueva York, EUA, 2005.
[10] Clare, A.R., *The Rhind Mathematical Papyrus. British Museum 10057 and 10058* (2 Vols.), Mathematical Association of America, Oberlin, OH, EUA, 1927, pág. 92.
[11] Cordero, F., *Reconstrucción de significados del cálculo integral: La noción de acumulación como una argumentación*, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. De C.V., México, 2003.
[12] Dijksterhuis, K., *The Principal Works of Simon Stevin* (Vol. I), Swets & Zeitlinger, Amsterdam, Holanda, 1955, pág. 229.
[13] Edwards, C.H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, Nueva York, EUA, 1979.
[14] Heath, T.L., *A History of Greek Mathematics* (2 Vols.), The Clarendon Press, Oxford, Inglaterra, 1921.
[15] Kallio, B.V., *A History of the Definite Integral* (tesis de Maestría), University of British Columbia, Vancouver, Canadá, 1966.
[16] Kleiner, I., "History of the Infinitesimally Small and the Infinitesimally Large in Calculus", *Educational Studies in Mathematics* **48** 2–3 (2001) 137–174.
[17] Macintosh, W.A., *The Infinite in the Finite*, Oxford University Press, Nueva York, EUA, 1995.
[18] Malet, A., *From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*, Servei Publicacions, Barcelona, España, 1996.
[19] Merzbach, U.C., y C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, Nueva York, EUA, 2011.
[20] Olave, M., *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva* (tesis de Maestría), CICATA-IPN, México, 2005.

[21] Ostermann, A., y G. Wanner, *Geometry by its History*, Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 2012.

[22] Probst, S., "Indivisibles and Infinitesimals in Early Mathematical Texts of Leibniz", en U. Goldenbaum y D. Jesseph (Eds.), *Infinitesimal Differences: Controversies Between Leibniz and his Contemporaries*, Walter de Gruyter, Göttingen, Alemania, 2008, pp. 95–106.

[23] Rouse, B., *A Short Account of the History of Mathematics*, Macmillan and Co. Limited, Londres, Inglaterra, 1908.

[24] Robert, A., y N. Speer, "Research on the Teaching and Learning of Calculus/Elementary Analysis", en D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Press, Holanda, 2001, pp. 283–299.

[25] Stillwell, J., *Mathematics and its History*, Springer, San Francisco, CA, EUA, 2010.

[26] Turégano, P., "Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida", *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* **10** 2 (1996) 9–28.

ABSTRACT

An analysis of the historical development of the ideas that allow for a reconstruction of the concept of Definite Integral of functions of one variable has been performed. Some didactic implications are highlighted which are suggested to be considered during the design of new proposals for the teaching of this concept. Thus, this analysis serves as an epistemological basis for a proposal in the teaching of the already mentioned mathematical concept.