

Análisis espectral de las matrices de Jacobi: los resultados clásicos

Mikhail Kudryavtsev

IIMAS-UNAM,
The Institute for Low Temperature Physics and
Engineering of
the National Academy of Science of Ukraine
(ILTPE),
Ukraine, Kharkov, 61164, Lenin Ave., 47

kudryavtsev@ilt.kharkov.ua,
mikhail@leibniz.iimas.unam.mx

RECIBIDO: 4 de mayo de 2002

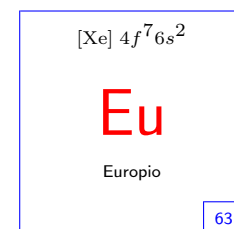
ACEPTADO: julio de 2002

INTRODUCCIÓN

La mayoría de los problemas encontrados pueden ser separados en dos grupos: problemas directos y problemas inversos. En problemas directos uno tiene que determinar el progreso de un proceso si conoce las leyes que dirigen este proceso y los parámetros que caracterizan al sistema. Habitualmente, tales problemas se reducen a la solución de ciertas ecuaciones (normalmente, ecuaciones diferenciales), y la dificultad principal es resolver la ecuación.

Los problemas inversos (originalmente) aparecen cuando no se conocen los parámetros del sistema y tenemos que encontrarlos por tales o cuales características del proceso en curso. Aquí, a veces, las características se encuentran en el experimento y a veces se miden por medio de consideraciones constructivas.

Por ejemplo, en problemas inversos de geofísica, uno tiene que reconstruir las propiedades de la corteza terrestre (los parámetros del sistema) por observación de la propagación de las vibraciones en la corteza. A menudo se tienen que escoger los parámetros del mecanismo construido de tal manera



peso atómico: 151.965
punto de fusión: 826 °C
punto de ebullición: 1439 °C

que las frecuencias de sus vibraciones propias se encuentren en los intervalos dados.

Los ejemplos mencionados ya son bastantes para entender que los problemas inversos no son menos importantes que los problemas directos. Sin embargo, no hay algoritmo general para solucionar problemas inversos. Por eso a menudo uno tiene que solucionar muchas veces el problema directo para diferentes valores de los parámetros, y de muchas soluciones escoger la que está lo más cerca de los datos experimentales (o deseados).

Los problemas inversos de la teoría espectral de operadores desempeñan un papel especial. En éstos, estando dada una cierta clase de operadores, tenemos que encontrar las propiedades espectrales que determinan unívocamente al operador y además dar un método de la reconstrucción del operador. Estos problemas son importantes tanto desde el punto de vista de las aplicaciones (mecánica cuántica, geofísica, teoría de vibraciones) como del de las matemáticas puras. Para una serie de estos problemas se pudieron elaborar métodos generales de solución y el aparato desarrollado para esto encontró más tarde aplicaciones inesperadas en la teoría de las ecuaciones diferenciales de evolución no-lineales.

En este artículo vamos a considerar el problema más clásico y más simple de los problemas inversos espectrales para los operadores de dimensión finita: el problema inverso del análisis espectral para las matrices simétricas de tres diagonales (las matrices de Jacobi):

$$J_N = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b_k \neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Estas matrices describen las vibraciones del sistema mecánico, representado en la figura 1, que consiste de masas, enlazadas por resortes: las frecuencias de las vibraciones de este sistema son los valores propios de la matriz de Jacobi, cuyos coeficientes son determinados por los parámetros de este sistema, y el movimiento de las masas se describe por medio de los vectores propios de la matriz. Por eso, primeramente vamos a estudiar las propiedades de los vectores y valores propios de la matriz de Jacobi, es decir, vamos a solucionar el problema directo para nuestra matriz.

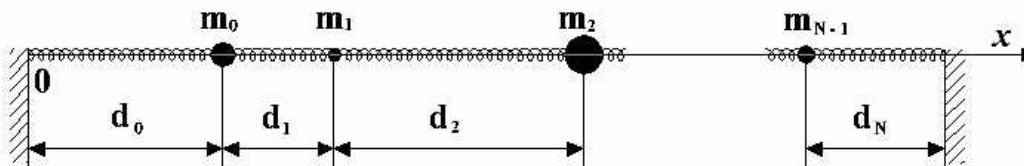
[Xe] 4f⁷5d¹6s²

Gd

Gadolinio

64

peso atómico: 157.25
punto de fusión: 1312 °C
punto de ebullición: 3000 °C



1. LOS VECTORES PROPIOS Y LOS VALORES PROPIOS DE LA MATRIZ J_N

Sea \vec{y} un vector propio de J_N con el valor propio λ_0 . El vector satisface la ecuación

$$(J_N - \lambda_0 I)\vec{y} = 0, \quad \vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^*,$$

Escribimos esta ecuación en coordenadas:

$$\begin{cases} a_0 y_0 + b_0 y_1 = \lambda_0 y_0, \\ b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = \lambda_0 y_1, \\ b_1 y_1 + a_2 y_2 + b_2 y_3 = \lambda_0 y_2, \\ \vdots \\ b_{k-1} y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = \lambda_0 y_k, \\ \vdots \\ b_{N-3} y_{N-3} + a_{N-2} y_{N-2} + b_{N-2} y_{N-1} = \lambda_0 y_{N-2}, \\ b_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} = \lambda_0 y_{N-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Como podemos ver, para cada valor propio λ_0 , el vector propio es completamente determinado por su primera coordenada y_0 : si conocemos y_0 , encontraremos inmediatamente y_1 de la primera ecuación del sistema (1):

$$y_1 = \frac{1}{b_0}(\lambda_0 y_0 - a_0 y_0) = y_0 \left(\frac{1}{b_0} \lambda_0 - \frac{a_0}{b_0} \right)$$

Luego, conociendo y_0 y y_1 , encontramos y_2 :

$$y_2 = \frac{1}{b_1}(\lambda_0 y_1 - b_0 y_0 - a_1 y_1) = y_0 \left(\frac{1}{b_0 b_1} \lambda_0^2 - \frac{a_1}{b_0 b_1} \lambda_0 + \left(\frac{a_0 a_1}{b_0 b_1} - b_0 \right) \right),$$

después encontramos y_3 , etc. Nosotros vemos que los elementos y_k se expresan polinomialmente por medio del valor propio λ_0 , y los coeficientes

$[Xe] 4f^9 6s^2$ Tb Terbio
--

peso atómico: 158.92534
 punto de fusión: 1356 °C
 punto de ebullición: 2800 °C

de estos polinomios solamente dependen de los elementos de la matriz J_N . (Destacamos que para cada vector propio, los elementos y_k son números, pero se expresan polinomialmente por λ_0 .) Denotamos estos polinomios como

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= 1, \\ P_1(\lambda) &= \frac{1}{b_0}\lambda - \frac{a_0}{b_0}, \\ P_2(\lambda) &= \frac{1}{b_0b_1}\lambda^2 - \frac{a_1}{b_0b_1}\lambda + \left(\frac{a_0a_1}{b_0b_1} - b_0\right), \end{aligned}$$

etcétera. Aquí $P_0(\lambda)$ es un polinomio de grado 0, $P_1(\lambda)$ es un polinomio de grado 1, etc., pues, $\deg P_k(\lambda) = k$. Así pues, de las primeras $N - 1$ ecuaciones obtenemos que el vector propio \vec{y} tiene la forma

$$\vec{y} = y_0 \left(P_0(\lambda_0), P_1(\lambda_0), \dots, P_{N-1}(\lambda_0) \right)^*.$$

De este resultado en seguida obtenemos que la matriz J_N puede tener solamente valores propios de multiplicidad 1 (simples); es decir, no puede tener dos vectores propios linealmente independientes, pues si suponemos que hay dos vectores independientes para el mismo valor propio λ_0 : \vec{c} y \vec{d} , entonces

$$\begin{aligned} \vec{c} &= c_0 \left(P_0(\lambda_0), P_1(\lambda_0), \dots, P_{N-1}(\lambda_0) \right)^*, \\ \vec{d} &= d_0 \left(P_0(\lambda_0), P_1(\lambda_0), \dots, P_{N-1}(\lambda_0) \right)^* \end{aligned}$$

y vemos que \vec{c} y \vec{d} son linealmente dependientes.

La matriz J_N es una matriz simétrica. Según el teorema espectral para los operadores autoadjuntos de dimensión finita, J_N tiene exactamente N vectores propios independientes que forman una base del espacio \mathbf{R}^N . Y según lo que acabamos de demostrar, estos vectores corresponden a diferentes valores propios. Entonces, la matriz J_N tiene N diferentes valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$.

La última de las ecuaciones del sistema (1) puede ser escrita en la forma

$$b_{N-2}P_{N-2}(\lambda_0) + a_{N-1}P_{N-1}(\lambda_0) - \lambda_0P_{N-1}(\lambda_0) = 0.$$

La parte izquierda de esta ecuación es un polinomio del grado N por λ_0 , es decir, que cada valor propio λ_0 es una raíz del polinomio

$$Q_N(\lambda) := b_{N-2}P_{N-2}(\lambda) + a_{N-1}P_{N-1}(\lambda) - \lambda P_{N-1}(\lambda).$$

[Xe] $4f^{10}6s^2$

Dy

Disprosio

66

peso atómico: 162.5
punto de fusión: 1407 °C
punto de ebullición: 2600 °C

Todos los coeficientes de este polinomio, $Q_N(\lambda)$, se expresan por medio de los elementos de la matriz $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, b_0, b_1, \dots, b_{N-2}$. Todos los eigenvalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ son raíces del polinomio $Q_N(\lambda)$. Este polinomio tiene grado N . En consecuencia, todas sus raíces son valores propios. Como dos polinomios de grado N que tienen las mismas N raíces son proporcionales, vemos que el polinomio $Q_N(\lambda)$ coincide con el polinomio característico de la matriz J_N , excepto por la multiplicación con un valor constante. Así pues, tenemos el siguiente

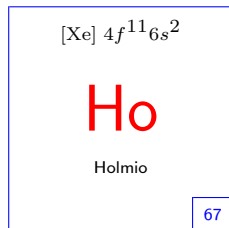
Lema. *La matriz J_N tiene N diferentes valores propios, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, que son las raíces del polinomio $Q_N(\lambda)$. Este polinomio es proporcional al polinomio característico de la matriz J_N . Los vectores propios normalizados de la matriz J_N tienen la forma*

$$\vec{e}_j = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}} \begin{pmatrix} P_0(\lambda_j) \\ P_1(\lambda_j) \\ \vdots \\ P_{N-1}(\lambda_j) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Notamos que los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda), \forall \lambda$ (no solamente para los valores propios), por su construcción satisfacen todas las ecuaciones del sistema (1), a excepción de la última ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(\lambda) = 1, \\ a_0 P_0(\lambda) + b_0 P_1(\lambda) = \lambda P_0(\lambda), \\ b_0 P_0(\lambda) + a_1 P_1(\lambda) + b_1 P_2(\lambda) = \lambda P_1(\lambda), \\ b_1 P_1(\lambda) + a_2 P_2(\lambda) + b_2 P_3(\lambda) = \lambda P_2(\lambda), \\ \vdots \\ b_{k-1} P_{k-1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_k P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda), \\ \vdots \\ b_{N-3} P_{N-3}(\lambda) + a_{N-2} P_{N-2}(\lambda) + b_{N-2} P_{N-1}(\lambda) = \lambda P_{N-2}(\lambda). \end{array} \right. \quad (3)$$

Pero si λ es un valor propio, entonces, en este caso, los valores de los polinomios $P_0(\lambda_0), P_1(\lambda_0), \dots, P_{N-1}(\lambda_0)$ satisfacen todas las ecuaciones del sistema (1), *inclusive* la última ecuación.



2. LA FUNCIÓN ESPECTRAL DE LA MATRIZ J_N

Consideramos el espacio \mathbf{P}_N de todos los polinomios de grado menor o igual a $N - 1$. Los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$, que pertenecen a este espacio, forman una base en él porque tienen grado $\deg P_k(\lambda) = k$, $k \leq N - 1$ (no es difícil demostrar que cada sistema de N polinomios que tienen tales grados es una base en el espacio \mathbf{P}_N). Consideramos un mapeo lineal del espacio \mathbf{R}^N al espacio \mathbf{P}_N que transforma la base estándar $(1, 0, \dots, 0)^*, (0, 1, \dots, 0)^*, \dots, (0, 0, \dots, 1)^*$ del espacio \mathbf{R}^N en la base $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$ del espacio \mathbf{P}_N . Entonces, si el vector $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^* \in \mathbf{R}^N$ tiene coordenadas x_0, x_1, \dots, x_{N-1} en la base estándar $(1, 0, \dots, 0)^*, (0, 1, \dots, 0)^*, \dots, (0, 0, \dots, 1)^*$, su imagen tiene las mismas coordenadas en la base $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$:

$$f(\vec{x}) \equiv \tilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k P_k(\lambda), \quad \vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^* \in \mathbf{R}^N.$$

Así pues, si $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k P_k(\lambda)$, $f^{-1}(R(\lambda)) \equiv \vec{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})^*$.

Observamos ahora cómo se transforma el producto escalar del espacio \mathbf{R}^N al espacio \mathbf{P}_N . Pasando a la base de los vectores propios \vec{e}_j de la matriz J_N en el espacio \mathbf{R}^N (véase (2)), tenemos:

$$(\vec{x}, \vec{e}_j) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k P_k(\lambda_j) = \frac{\tilde{x}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}},$$

$$(\vec{y}, \vec{e}_j) = \frac{\tilde{y}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}},$$

donde $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}$ y $\{y_k\}_{k=0}^{N-1}$ son las coordenadas de los vectores \vec{x} y \vec{y} en la base estándar $(1, 0, \dots, 0)^*, (0, 1, \dots, 0)^*, \dots, (0, 0, \dots, 1)^*$.

Como el sistema $\{e_j\}_{j=1}^N$ es ortonormal, podemos escribir

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=1}^N (\vec{x}, \vec{e}_j) \overline{(\vec{y}, \vec{e}_j)} = \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{x}(\lambda_j) \overline{\tilde{y}(\lambda_j)}}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}.$$

[Xe] 4f¹²6s²

Er

Erbio

68

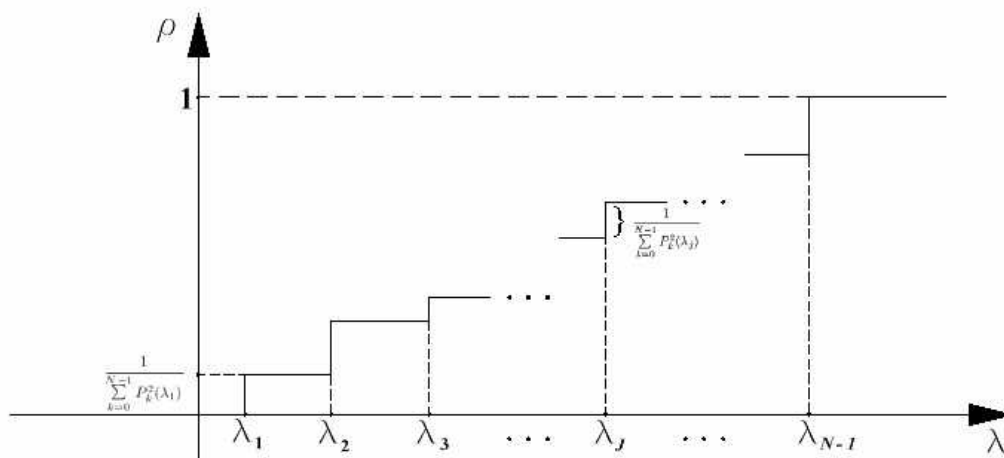
peso atómico: 167.26
punto de fusión: 1497 °C
punto de ebullición: 2900 °C

La última igualdad puede ser escrita en forma

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda) \overline{\tilde{y}(\lambda)} d\rho(\lambda),$$

donde $\rho(\lambda)$ es una función escalón no-decreciente, que es constante en todas partes, a excepción de los puntos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, igual a cero para $\lambda < \lambda_1$, y cuyos saltos en estos puntos son iguales a

$$\Delta\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}$$



(véase la figura 2). Evidentemente, podemos escribir una fórmula equivalente para la función $\rho(\lambda)$:

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Así pues, si ahora determinamos el producto escalar en el espacio \mathbf{P}_N ,

$$\langle R(\lambda), S(\lambda) \rangle_{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) \overline{S(\lambda)} d\rho(\lambda) \quad (4)$$

(es muy fácil verificar que es un producto escalar), tendremos la siguiente igualdad:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \rangle_{\rho}, \quad (5)$$

[Xe] 4f¹³6s²

Tm

Tulio

69

peso atómico: 168.93421
 punto de fusión: 1545 °C
 punto de ebullición: 1727 °C

es decir, f es una isometría del espacio \mathbf{R}^N al espacio \mathbf{P}_N , con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ (denotamos este espacio como $\mathbf{P}_N(\rho)$).

Como los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$ son la imagen de la base estándar $(1, 0, \dots, 0)^*, (0, 1, \dots, 0)^*, \dots, (0, 0, \dots, 1)^*$, teniendo en cuenta (4), vemos que estos polinomios forman un sistema ortonormal en el espacio $\mathbf{P}_N(\rho)$. Aún más, utilizando este hecho, es fácil demostrar las siguientes propiedades de la función espectral:

1) La suma de los saltos de la función es igual a 1:

$$\sum_{j=1}^N \Delta\rho(\lambda_j) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)} = 1.$$

2) Las siguientes fórmulas para la transformación inversa f^{-1} son ciertas:

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda) \overline{P_k(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad (6)$$

$$(J_N \vec{x})_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \tilde{x}(\lambda) \overline{P_k(\lambda)} d\rho(\lambda) \quad (7)$$

(de la segunda de estas fórmulas se puede ver que la matriz J_N en el espacio \mathbf{R}^N corresponde al operador de multiplicación por λ en el espacio \mathbf{P}_N . Sabemos que la transformada de Fourier tiene la propiedad análoga: el operador diferencial corresponde al operador de multiplicación después de que aplicamos la transformada de Fourier. Por eso, en nuestro caso, f también se llama *Transformada de Fourier*. La fórmula (5) se llama *Identidad de Parseval*. Las fórmulas (6) y (7) se llaman *Fórmulas de la expansión por vectores propios*.)

3. EL PROBLEMA INVERSO: LA CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE JACOBI CON LA FUNCIÓN ESPECTRAL DADA

Como vemos, la función espectral que satisface las propiedades dichas corresponde a cada matriz J_N . Esta función tiene toda la información esencial del espectro de la matriz J_N . Por ejemplo, con ayuda de esta función se puede escribir la fórmula de las vibraciones del sistema mecánico descrito en el principio. El problema inverso consiste en reconstruir la matriz J_N por su función espectral. Este problema tiene un sentido mecánico: observando durante mucho tiempo las vibraciones de la primera masa de nuestro sistema mecánico, es posible reconstruir la función espectral de la matriz. Si

[Xe] 4f¹⁴6s²

Yb

Itterbio

70

peso atómico: 173.04
punto de fusión: 824 °C
punto de ebullición: 1427 °C

nosotros podemos reconstruir la matriz J_N por su función espectral, podremos determinar las características mecánicas del sistema de las vibraciones de la primera masa.

Queremos solucionar el problema inverso, que es reconstruir la matriz J_N conociendo su función espectral. Ahora vamos a ver como se resuelve este problema. Suponemos que tenemos la función $\rho(\lambda)$ decreciente que tiene exactamente N saltos. Consideramos el espacio \mathbf{P}_N y definimos en éste el producto escalar por la misma fórmula (4) que teníamos para la función espectral:

$$\langle R(\lambda), S(\lambda) \rangle_\rho := \int_{-\infty}^{\infty} R(\lambda) \overline{S(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

Sabemos que si $\rho(\lambda)$ es la función espectral $\rho_J(\lambda)$ de una matriz de Jacobi, los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$ generados por esta matriz (según las ecuaciones (3)), forman un sistema ortonormal en el espacio $\mathbf{P}_N(\rho)$; pero también sabemos que los grados de estos polinomios son: $\deg P_k(\lambda) = k$. Este hecho nos da la posibilidad de encontrar los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$, conociendo solamente el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$. Para esto tomamos el sistema $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1}$ y ortogonalizamos este sistema utilizando el algoritmo de Gram-Schmidt. Obtenemos así un sistema ortonormal de polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$ que tienen los mismos grados que el sistema inicial $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1}$ que ortogonalizamos: $\deg P_k(\lambda) = k$. Éstos son los mismos polinomios $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$ generados por la matriz que queremos reconstruir. Conociendo estos polinomios, no existe problema al reconstruir la matriz J_N . En efecto, sabemos que estos polinomios satisfacen las ecuaciones del sistema (3):

$$b_{k-1}P_{k-1}(\lambda) + a_kP_k(\lambda) + b_kP_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda), \quad k = 0, \dots, N-2, \quad b_{-1} = 0.$$

Para encontrar los elementos a_k y b_k , obtenemos el producto escalar de esta última igualdad con $P_j(\lambda)$, $j = k, k+1$. Cuando $k = j$, se tiene:

$$b_{k-1}\langle P_{k-1}, P_k \rangle_\rho + a_k\langle P_k, P_k \rangle_\rho + b_k\langle P_{k+1}, P_k \rangle_\rho = \langle \lambda P_k, P_k \rangle_\rho,$$

y por la ortonormalidad de los polinomios $P_j(\lambda)$ (*i.e.*, $\langle P_i, P_l \rangle_\rho = \delta_{il}$), vemos que¹

$$a_k = \langle \lambda P_k, P_k \rangle_\rho, \quad k = 0, \dots, N-2.$$

¹El último elemento a_{N-1} también se encuentra mediante la fórmula

$$a_{N-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_{N-1}(\lambda) \overline{P_{N-1}(\lambda)} d\rho(\lambda).$$

[Xe] 4f¹⁴5d¹6s²

Lu

Lutecio

71

peso atómico: 174.967
punto de fusión: 1652 °C
punto de ebullición: 3327 °C

Ahora, si $j = k + 1$, obtenemos

$$b_{k-1}\langle P_{k-1}, P_{k+1} \rangle_\rho + a_k\langle P_k, P_{k+1} \rangle_\rho + b_k\langle P_{k+1}, P_{k+1} \rangle_\rho = \langle \lambda P_k, P_{k+1} \rangle_\rho,$$

y utilizando de nuevo la ortonormalidad de los polinomios,

$$b_k = \langle \lambda P_k, P_{k+1} \rangle_\rho, \quad k = 0, \dots, N - 2.$$

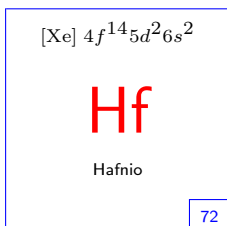
De esta manera, reconstruimos los elementos de la matriz J_N por la función espectral. Así obtenemos la solución de nuestro problema inverso.

CONCLUSIONES

Este trabajo es un resumen de las notas “Los problemas inversos de la teoría espectral de los operadores de dimensión finita” de V. Marchenko. Se tienen planes de publicar una versión más extensa en notas editadas por la SMM.

REFERENCIAS

- [1] Atkinson, F. V., *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press, Nueva York, Londres, 1964.
- [2] Berezanskii, Yu. M., “Expansion in Eigenfunction of Self-Adjoint Operators”, *Transl. Math. Monographs* **17** (Amer. Math. Soc.), Providence, RI, 1968.
- [3] Gesztesy, F. y B. Simon, “ M -Functions and Inverse Spectral Analysis for Finite and Semi-Infinite Jacobi Matrices”, *Journal d’Analyse Mathématique* **73** 276, 1997.
- [4] Teschl, G., “Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices”, *Mathematical Surveys and Monographs* **72** (Amer. Math. Soc.), Providence, RI, 2000.



peso atómico: 178.49
punto de fusión: 2227 °C
punto de ebullición: 4691 °C