Divulgación

El teorema de Beatty

Pedro Sánchez
Universidad Autónoma de Yucatán
drini@planetmath.org

RECIBIDO: *febrero de 2002*
ACEPTADO: *julio de 2002*

RESUMEN

El teorema de Beatty es un resultado que expresa al conjunto de los números naturales como una partición de sucesiones especiales. Primero, definimos el espectro de un número y enunciamos algunos lemas que nos son útiles posteriormente. Después enunciamos y probamos el teorema principal, para terminar con una aplicación en la resolución de un problema aparecido en una Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico.

Notación

$\lfloor x \rfloor$ denota la función *piso*: el mayor entero que no es mayor que x.

$\lceil x \rceil$ denota la función *techo*: el menor entero que no es menor a x.

$\{x\}$ denota la función *parte fraccional* de x: $x - \lfloor x \rfloor$.

$[\mathcal{P}(x)]$ denota la función que devuelve 1 si x cumple la propiedad $\mathcal{P}(x)$, y 0 en caso contrario. (Por ejemplo [5 es primo] $= 1$ y [4 es primo] $= 0$).

Sea α un número real. Entonces, definimos el *espectro* de α como la sucesión:

$$\operatorname{spec}(\alpha) = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots\}.$$

[Xe] $4f^2 6s^2$
Ce
Cerio
58

peso atómico: 140.115
punto de fusión: 804 °C
punto de ebullición: 3470 °C

Resultados preliminares

Proposición 1. *No hay dos números reales que tengan el mismo espectro.*

Prueba. Sean α, β dos reales distintos. Podemos asumir que $\alpha < \beta$. Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe un entero m tal que $m(\beta-\alpha)\geq 1$, de donde $m\beta - m\alpha \geq 1$ lo cual implica que $\lfloor m\beta\rfloor > \lfloor m\alpha\rfloor$.

Entonces el m-ésimo término es diferente en ambas sucesiones (dado que todos los términos son enteros) y por lo tanto $\operatorname{spec}(\alpha)\neq\operatorname{spec}(\beta)$. ∎

Teorema 1. *Sea α un real positivo. Entonces el número de elementos en* $\operatorname{spec}(\alpha)$ *que son menores o iguales a n es*

$$\mathcal{N}(n,\alpha) = \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1.$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\alpha,n) &= \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha\rfloor \leq n] \\
&= \sum_{k>0} [\lfloor k\alpha\rfloor < n+1] \\
&= \sum_{k>0} [k\alpha < n+1] \\
&= \sum_{k} \left[0 < k < \frac{(n+1)}{\alpha}\right] \\
&= \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1.
\end{aligned}$$ ∎

Ahora, consideremos los siguientes espectros:

$$\begin{aligned}
\operatorname{spec}(\sqrt{2}) &= \{1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,21,\ldots\} \\
\operatorname{spec}(2+\sqrt{2}) &= \{3,6,10,13,17,20,23,27,30,34,37,40,\ldots\}.
\end{aligned}$$

Después de analizarlos un momento, vemos que los números que faltan en uno, son los que aparecen en el otro, y que ningún número aparece en ambos

Proposición. *Los espectros* $\operatorname{spec}(\sqrt{2})$ *y* $\operatorname{spec}(2+\sqrt{2})$ *constituyen una partición de los números naturales.*

Prueba. Para cada entero n, consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned}
A_n &= \{x\in\operatorname{spec}(\sqrt{2}) \colon x\leq n\} \\
B_n &= \{x\in\operatorname{spec}(2+\sqrt{2}) \colon x\leq n\}
\end{aligned}$$

[Xe] $4f^3 6s^2$

Pr

Praseodimio

59

peso atómico: 140.90765
punto de fusión: 935 °C
punto de ebullición: 3343 °C

si se tiene que $|A_n| + |B_n| = n$ para toda n, entonces los espectros constituyen una partición del conjunto de los naturales.

Antes de proceder, veamos porqué esa condición es suficiente. Las sucesiones son disjuntas ya que si k es el menor entero que aparece en ambas sucesiones y $|A_k| + |B_k| = k$, entonces $|A_{k-1}| + |B_{k-1}| \leq k - 2$ (pues las sucesiones dadas por los espectros son no decrecientes), lo cual contradice la propiedad. Ahora, supongamos que k es el menor entero que no aparece en ninguno de los dos espectros. Entonces $|A_k| + |B_k| = k - 1$ porque el conjunto $A_k \cup B_k$ es igual a $\{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$. De este modo la propiedad asegura que $\operatorname{spec}(\sqrt{2})$ y $\operatorname{spec}(2+\sqrt{2})$ son una partición del conjunto de los naturales.

Notemos que $|A_n| = \mathcal{N}(n, \sqrt{2})$ y $|B_n| = \mathcal{N}(n, 2+\sqrt{2})$. Queremos probar entonces que $\left\lceil (n+1)/\sqrt{2} \right\rceil - 1 + \left\lceil (n+1)/(2+\sqrt{2}) \right\rceil - 1 = n$.

$$
\begin{aligned}
&\left\lceil \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rceil - 1 = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow (n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right) - \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} - \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} = n.
\end{aligned}
$$

La primera equivalencia se cumple ya que $(n+1)/\sqrt{2}$ y $(n+1)/(2+\sqrt{2})$ nunca son enteros. La última expresión se puede simplificar ya que

$$
\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1
$$

y además,

$$
\left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} = 1
$$

pues estamos sumando las partes fraccionarias de dos números no enteros cuya suma es entera. Concluimos entonces que $\mathcal{N}(n, \sqrt{2}) + \mathcal{N}(n, 2+\sqrt{2}) = n$, para toda n y por tanto los espectros forman una partición de los números naturales. ■

El resultado anterior es un caso particular del siguiente teorema:

[Xe] $4f^4 6s^2$

Nd

Neodimio

60

peso atómico: 144.24
punto de fusión: 1024 °C
punto de ebullición: 3111 °C

Teorema 2 (Beatty). *Sean α, β dos números irracionales (positivos) tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Entonces, los espectros de α y β constituyen una partición de los naturales.*

Prueba. Siguiendo la misma línea de demostración, calcularemos la suma de $\mathcal{N}(n,\alpha)$ y $\mathcal{N}(n,\beta)$ para ver que es igual a n.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(n,\alpha) + \mathcal{N}(n,\beta) = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow \left\lceil \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{\beta} \right\rceil - 1 = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow \left\lfloor \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{\beta} \right\rfloor = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow \frac{n+1}{\alpha} - \left\{ \frac{n+1}{\alpha} \right\} + \frac{n+1}{\beta} - \left\{ \frac{n+1}{\beta} \right\} = n \\
&\qquad \Longleftrightarrow (n+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - \left\{ \frac{n+1}{\alpha} \right\} - \left\{ \frac{n+1}{\beta} \right\} = n.
\end{aligned}$$

Como $1/\alpha + 1/\beta = 1$, y las partes fraccionarias de la última expresión suman 1 por ser partes fraccionarias de números no enteros cuya suma es entera, la última expresión es cierta y el teorema queda probado. ■

Todo irracional positivo α induce entonces una partición de los naturales por medio de su espectro y el complemento de su espectro, el cual será generado por el irracional $\beta = \alpha/(\alpha - 1) = 1 - 1/(\alpha - 1)$ que en virtud del teorema 1 será único. Es natural preguntarse si toda partición de los naturales en dos conjuntos infinitos puede verse como dos espectros, pero esto no es cierto. Para verificarlo, consideremos la progresión aritmética $\{5, 9, 13, 17, \ldots\}$ y su complemento. Como el primer término es 5, el número que debería generarla se encuentra entre 5 y 6 por lo que el segundo término debe ser al menos 10, lo cual obviamente no sucede.

Samuel Beatty propuso este teorema como un problema en el *American Mathematical Monthly* en marzo de 1926 como sigue: "Si X es un irracional positivo y Y su recíproco, pruebe que las sucesiones

$$\begin{gathered}
(1+X), 2(1+X), 3(1+X), \ldots \\
(1+Y), 2(1+Y), 3(1+Y), \ldots
\end{gathered}$$

contienen exactamente un número entre cada par de enteros positivos consecutivos."

[Xe] $4f^5 6s^2$

Pm

Prometio

61

peso atómico: (144.9128)
punto de fusión: 1168 °C
punto de ebullición: 2460 °C

El problema es equivalente a nuestra formulación, pues si $X = 1/Y$, entonces $1+X$ y $1+Y$ satisfacen las condiciones que dimos, (notando que $\beta = 1 - (1/\alpha - 1)$).

Como ejemplo de aplicación de este teorema, resolveremos el siguiente problema, que formó parte de la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico en el año 1994.

Problema 1. *Se tienen 3 listas de números a, b, c. la lista a contiene los números de la forma 10^k con k entero mayor o igual a 1. Las listas b y c contienen los mismos números pero escritos en base 2 y base 5, respectivamente:*

a	b	c
10	1010	20
100	1100100	400
1000	1111101000	13000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

pruebe que para cada entero $n > 1$, existe exactamente un número en exactamente una de las listas b o c con exactamente n dígitos.

Prueba. Sea $\alpha = \log_2 10$ y $\beta = \log_5 10$. Sabemos que el número de dígitos necesarios para representar a 10^r en base 2 es $\lceil \log_2 10^r \rceil = \lceil r\alpha \rceil$ y el necesario para base 5 es $\lceil \log_5 10^r \rceil = \lceil r\beta \rceil$ dado que α y β son números irracionales, $r\alpha$ y $r\beta$ nunca son enteros, por lo que las expresiones anteriores se convierten en $\lfloor r\alpha \rfloor + 1$ y $\lfloor r\beta \rfloor + 1$. Lo que se nos pide probar es que las sucesiones $\{\lfloor r\alpha \rfloor + 1\}_{r=1}^{\infty}$ y $\{\lfloor r\beta \rfloor + 1\}_{r=1}^{\infty}$ constituyen una partición del conjunto de enteros mayores a 1, o lo que es equivalente, que $\operatorname{spec}(\alpha)$ y $\operatorname{spec}(\beta)$ forman una partición de los enteros positivos. Notamos ahora que $1/\alpha + 1/\beta = 1$ ya que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10} = \log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$$

y aplicando el teorema de Beatty, obtenemos el resultado deseado. ■

[Xe] $4f^6 6s^2$

Sm

Samario

62

peso atómico: 150.36
punto de fusión: 1072 °C
punto de ebullición: 1800 °C

Referencias

[1] Graham, Knuth, Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed., Addison-Wesley, 1994.

[2] *American Mathematical Monthly* **33**, 3, marzo, 1926.