

La fórmula de Euler y la topología

Juan E. Nápoles Valdes

Universidad de la Cuenca del Plata,
Lavalle 50,
3400 Corrientes, Argentina.

idic@ucp.edu.ar

UTN-FRR

French 314,

3500 Resistencia, Chaco, Argentina.

matbasicas@frre.utn.edu.ar

RECIBIDO: *abril de 2002*

ACEPTADO: *agosto de 2002*

0. ALGO DE HISTORIA

El proceso de desarrollo de las matemáticas, en el transcurso de su historia, se hace cada vez, más y más complejo a lo largo de la historia del hombre, pero, sin lugar a dudas, el siglo XVIII ocupa un lugar predominante: en este siglo la complejidad y multilateralidad del desarrollo matemático, alcanzó un alto grado.

El ritmo de desarrollo de la ciencia en esta época aumenta rápidamente, la revolución industrial, la formación de un mercado mundial, lo que conlleva un desarrollo de la navegación y construcción naval, la técnica militar, la termotecnia, la hidroenergética, etc., las necesidades de los hombres, presentan problemas ante la ciencia que rápidamente se complican. Junto a los problemas de la mecánica y la astronomía, se situaron los problemas



[Ne] $3s^2 3p^4$

S

Azufre

16

peso atómico: 32.066
punto de fusión: 115.2° C
punto de ebullición: 444.7° C

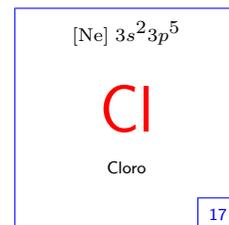
de la creación del aparato matemático de investigación de los fenómenos electromagnéticos y térmicos.

Para las investigaciones científicas, en las ciudades más grandes de Europa, se crean instituciones especiales: las Academias de Ciencias, subsidiadas por el Estado. Gradualmente crece el papel de los centros superiores de enseñanza, haciéndose particularmente notable hacia finales de siglo, en la época de la Revolución Francesa. Es así como surge una capa de científicos profesionales, entre ellos los matemáticos-profesionales, cuyo principal asunto es la investigación científica y la enseñanza. Entre ellos, como el más notable de dicho siglo, surge Leonard Euler (1707–1783).

Euler fue no solamente uno de los matemáticos más fecundos de la historia, sólo igualado, probablemente, por Cayley y Cauchy, sino también, uno de los más eminentes científicos de todos los tiempos. Cosmopolita en el exacto sentido de la palabra —pasó los primeros años de su vida en Basilea (Suiza), trabajó más de 30 años en San Petersburgo y un cuarto de siglo en Berlín, entonces capital de Prusia— y alcanzó una popularidad y una celebridad comparables a las de Galileo, Newton o Einstein. Euler, hijo mayor del pastor campesino Pablo Euler, se interesa pronto por las matemáticas y, en consecuencia, asiste a los cursos de Jacobo Bernoulli.

El inteligente joven recibe las primeras enseñanzas de su padre, asistiendo posteriormente al gimnasio de Basilea, entonces de poco prestigio y, además, es alumno particular de Burckhardt. Ingresó, en 1720, en la Universidad de Basilea y asiste simultáneamente, a los cursos de Daniel y Nicolás II Bernoulli; adelanta mucho en la clase de éste. En 1721 se gradúa de bachiller y, en 1723, de maestro en artes; traba amistad con el hijo de Juan Bernoulli, interrumpiendo sus estudios teológicos y dedicándose, por entero, a las matemáticas y, ya en 1725, trabaja dignamente en las trayectorias algebraicas recíprocas (publicada en 1727). En mayo de este mismo año viajó a San Petersburgo, pues no fue aceptado, por su juventud, en la cátedra de Física de la Universidad de Basilea y allí comenzó a trabajar en la Academia. La vacante, es cierto, era en la cátedra de Fisiología, pero esto no desconcertó al joven científico. ¡A pesar de todo, era un trabajo!, sin embargo, no llegó a ocuparse de fisiología y le propusieron la posibilidad de realizar investigaciones en el campo de las ciencias fisicomatemáticas, dedicándose con ahínco al trabajo científico y pedagógico.

Con respecto a lo último apuntado, debemos decir que no hay posibilidades de enumerar, aunque sea, los descubrimientos principales y los logros científicos de Euler, ellos son demasiados. Caracterizarlos significaría, prácticamente, caracterizar toda la matemática del siglo XVIII. En los trabajos de Euler está contenida toda una profunda serie de ideas, las cuales obtuvieron desarrollo ulterior sólo después de algunas decenas de años. Por ejemplo, parcialmente se adelantó a las investigaciones de Gauss sobre la



peso atómico: 35.4527
 punto de fusión: -101°C
 punto de ebullición: -34°C

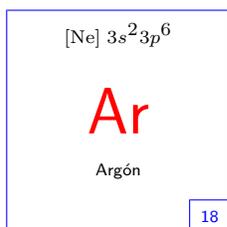
geometría interior de las superficies. Los teoremas y fórmulas, los métodos y símbolos que llevan el nombre de Euler, frecuentemente se encuentran en la matemática actual, ocupando un lugar de importancia.

Muchos descubrimientos de Euler se redescubrieron después de su muerte por otros investigadores. Especialmente numerosos son los redescubrimientos que se encuentran en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, Euler redujo, ya en el año 1766, el problema sobre las vibraciones de una membrana circular a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables. Ahora esta ecuación lleva el nombre de Bessel, matemático y astrónomo alemán del siglo XIX. A propósito, la solución dada por Euler a esta ecuación es una serie infinita que expresa funciones cilíndricas de primer género y cualquier orden (las funciones cilíndricas de orden cero aparecieron en las memorias de Daniel Bernoulli sobre las vibraciones de un hilo flexible fijo en un extremo). Ejemplos de tal tipo de redescubrimientos pueden citarse muchos.

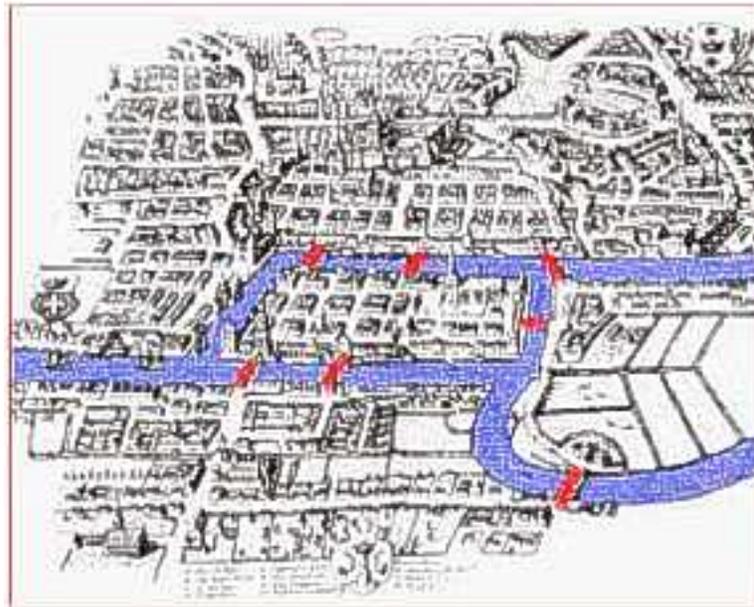
Euler era también extraordinariamente modesto, respecto a la propiedad intelectual. Jamás aspiró a disfrutar de privilegios —contrariamente a la mayoría de los científicos de todos los tiempos— llegando, incluso a veces, a hacer don generoso de sus ideas y descubrimientos. En sus obras no oculta nada al lector, sino que juega limpio con él, brindándole las mismas condiciones y posibilidades de que disfrutó para encontrar algo nuevo; más aún, frecuentemente lo guía hasta el umbral, dejándole la alegría del descubrimiento, única pedagogía valedera.

¿Cuáles son las razones que propiciaron la aparición del fenómeno Euler? En primer lugar, una memoria prodigiosa (a edad avanzada divertía a su familia recitándole, fielmente y en latín, cualquier canto de *La Eneida* de Virgilio; amén de que conocía de memoria las actas de las sesiones de la Academia, varios decenios después de efectuadas, esto sin referirnos a su prodigiosa memoria para las matemáticas). En segundo lugar, una extraordinaria capacidad de concentración. “Con un niño en las rodillas o un gato en el hombro, así escribía sus obras inmortales”, nos cuenta su amigo y colega Thiébauld. La tercera razón es, simplemente, su trabajo, tranquilo e incesante.

En la ciudad alemana de Koenigsberg (en la época soviética, Kaliningrado) siete puentes atravesaban el río Pregel en su curso sinuoso por la ciudad. Sencillos ciudadanos se preguntaban: ¿Cómo puede una persona planear su paseo del domingo en la tarde, de modo que cruce una sola vez cada puente? Así, estos siete puentes del siglo XVIII proporcionaron el material para uno de los más célebres problemas de las matemáticas. Cuando Euler presentó, en 1735, la solución a la Academia Rusa de San Petersburgo, la Topología o *Analysis Situs* quedó fundada. Con respecto al “Problema de los Siete Puentes”, debemos decir además, que sentó también las bases de



peso atómico: 39.948
punto de fusión: -189.37 °C
punto de ebullición: -185.86 °C



la moderna teoría de grafos, pues su solución, presentó las técnicas actuales de esta rama de las matemáticas.

En 1758 publicó la demostración de la fórmula $V + C = A + 2$, para poliedros simples conexos, consolidando e iniciando la acumulación de hechos de Topología. Esta fórmula, que Poincaré reconoció como uno de los teoremas centrales de la Topología, permite demostrar que no existen más que 5 poliedros regulares; y de hecho, será el eje central de nuestra exposición.

Con la primera concepción formal del *Calculus*, elaborada por Newton y Leibniz, y que tuvo en los hermanos Jacques y Johan Bernoulli, entre otros, a los descubridores de un mundo inconmensurable del espíritu humano, que había de colonizarse en el *Siglo de las Luces* (siglo XVIII), el papel de primer colonizador de gran estilo, comparable al de hombres como Cristóbal Colón, iba a corresponderle a Euler.

En el campo de las llamadas *Matemáticas puras*, Euler creó de golpe y de manera extraordinaria varias nuevas disciplinas de investigación, apartes de las ya mencionadas, y las desarrolló metódicamente: la teoría de las series infinitas, el álgebra superior y el cálculo de variaciones.

Asimismo, Euler determinó, investigando la serie armónica, la constante de su nombre, siendo la más sencilla y conocida de las series infinitas que dan el valor de ella:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

[Ar] 4s ¹
K
Potasio
19

peso atómico: 39.0983
 punto de fusión: 63.2 °C
 punto de ebullición: 766.4 °C

Euler, que indudablemente tenía el ‘tacto de Midas’ en las matemáticas, no sólo inventó el símbolo e y calculó su valor hasta 23 decimales, sino que le dio varias expresiones interesantes, en términos de fracciones complejas infinitas.

Por otra parte, la Fórmula de Euler: $e^{\pi i} = -1$, es, a no dudarlo, la fórmula más famosa de las matemáticas.

En el álgebra, la investigación la centra sobre todo en los problemas y teoremas de Fermat. Aunque su esperanza de poder resolver ecuaciones de grado superior mediante radicales no se cumple, Euler descubre, no obstante, en 1776, clases especiales de ecuaciones que sí pueden resolverse.

Los métodos generales de solución de problemas del cálculo de variaciones fueron elaborados en este siglo por Euler y Lagrange. Precisamente en esos trabajos fue establecida una estrecha relación entre el cálculo variacional y las ciencias naturales. La elaboración de la teoría de éste prosiguió en el transcurso de más de dos siglos como una imperiosa necesidad de completar las condiciones necesarias de primer orden (ecuación de Euler), así fueron halladas las condiciones necesarias y suficientes de segundo orden para dos tipos de extremos: fuerte y débil.

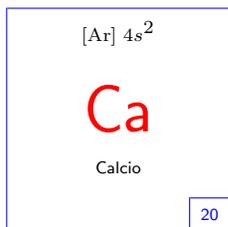
Para no agobiar al lector con sucesivos datos de este tipo, debemos decir que, en conclusión, Euler es quien hace triunfar los conceptos y los métodos analíticos sobre los sintéticos, demasiado unidos a lo concreto y quien abre a los sucesores, un campo de trabajo muy amplio.

Ya por su sola productividad (aquí no hemos hablado de sus trabajos teológicos, filosóficos, mecánicos, astronómicos, de hidromecánica y de óptica, que ocupan significativo lugar en su obra) Euler constituye un fenómeno único. La gran edición suiza de sus obras, en la que vienen trabajando desde comienzos de siglo numerosos especialistas de diferentes países, cuenta hasta la fecha con 70 volúmenes en cuarto, a los que seguirán 14 tomos de “cartas y manuscritos”.

El siguiente cuadro da una idea más completa de las obras que preparó Euler para la imprenta, sin contar algunas decenas de manuscritos que no han podido ser fechados todavía:

<i>Años</i>	<i>Obras</i>
1725–1734	35
1735–1744	50
1745–1754	150
1755–1764	110
1765–1774	145
1775–1783	270

Según las diversas disciplinas de que tratan, estas obras se distribuyen de la siguiente manera:



peso atómico: 40.078
 punto de fusión: 841.5 °C
 punto de ebullición: 1500.5 °C

<i>Disciplina</i>	%
Álgebra, teoría de los números y análisis	40
Mecánica y demás aspectos de la física	28
Geometría y trigonometría	18
Astronomía	11
Construcción naval, arquitectura, artillería	2
Filosofía, teología, teoría de la música, etcétera.	1

De todo lo expuesto, podemos decir que aún quedan por descubrir numerosos tesoros en la obra de Euler, por lo que es necesario esperar todavía para que esa obra prodigiosa sea accesible a todos.

En 1750 en una carta a su colega Christian Goldbach, que estaba empezando a estudiar los poliedros y sus propiedades, Euler escribió:

... Recientemente se me ha ocurrido determinar propiedades generales de los sólidos limitados por superficies planas, porque no hay duda de que se podrían encontrar teoremas generales sobre ellos. Así como para figuras planas rectilíneas hay propiedades como las siguientes:

- 1) en cada figura plana, el número de lados es igual al número de ángulos, y
- 2) la suma de todos los ángulos interiores es igual a dos rectos por el número de lados menos cuatro rectos.

Así como para figuras planas sólo es necesario considerar lados y ángulos, para el caso de los sólidos deberán ser tenidos en cuenta más elementos...¹

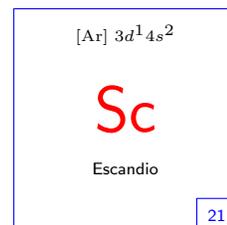
En esta carta, Euler consideraba la posibilidad de tener en cuenta las caras del poliedro, sus ángulos sólidos, los ángulos planos, los vértices y lados de cada cara, las aristas del poliedro, ... Así, Euler obtuvo:

... En cada cara, el número de lados es igual al número de ángulos planos. Dos caras se encuentran en un lado, entonces la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro. Por lo tanto, la cantidad total de lados de todas las caras es siempre un número par. Cada cara tiene por lo menos tres lados, entonces la cantidad total de lados de todas las caras es mayor o igual que tres veces el número de caras...²

De donde llegó a la siguiente propiedad:

¹Citado por Cronwell, Peter, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 189, extraído de Biggs, N. L., E. K. Lloyd y R. J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.

²Citado por Cronwell, Peter, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 190, extraído de Biggs, N. L., E. K. Lloyd y R. J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976.



peso atómico: 44.95591
 punto de fusión: 1539 °C
 punto de ebullición: 2831 °C

... La cantidad de ángulos sólidos más la cantidad de caras es igual a la cantidad de aristas del poliedro más dos...³

Esta relación fue completamente original en el momento en que se escribió esta carta y hoy es conocida como Fórmula de Euler. Normalmente, en la actualidad, en vez de hablar del número de ángulos sólidos, se hace referencia al número de vértices del poliedro. El enunciado del Teorema de Euler, es, por lo tanto:

Sea P un poliedro convexo, con C caras, A aristas y V vértices. Entonces se satisface $C - A + V = 2$.

Euler publicó su resultado pocas semanas después de la carta a Goldbach con su correspondiente demostración. Existen varias demostraciones para este teorema y más adelante presentamos algunas de ellas. La siguiente es sencilla por los pocos recursos externos que involucra.

Sea P un poliedro convexo con C caras, A aristas y V vértices. Queremos demostrar que se verifica $C - A + V = 2$.

Consideremos que al poliedro P le quitamos una de sus caras, pero dejamos sus correspondientes aristas y vértices. Elegimos una de las restantes, llamándola C_1 . C_1 tiene a_1 aristas y v_1 vértices.

Elijamos ahora otra cara, C_2 , no disjunta con C_1 ; o sea, que tiene alguna arista en común con ella. C_2 tiene a_2 aristas y v_2 vértices no comunes con C_1 .

Consideremos luego C_3 , no disjunta con C_1 o con C_2 , con a_3 aristas y v_3 vértices no comunes con las dos caras anteriores. Y así sucesivamente podemos ir considerando todas las caras del poliedro.

$C - 1$ es el número total de caras que podemos elegir de esta manera. A través de este procedimiento recorreremos todo el poliedro, excepto la cara que le hemos quitado. Se verifica entonces que:

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1 \\ a_2 &= v_2 + 1 \\ a_3 &= v_3 + 1 \\ &\vdots \\ a_c - 1 &= v_{c-1} + 1 \end{aligned}$$

³Citado por Cronwell, Peter, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, pp. 190, extraído de Federico, P. J., *Descartes on Polyhedra: a Study of the Solidurum Elementis*, Springer Verlag, 1982.

[Ar] $3d^24s^2$

Ti

Titanio

22

peso atómico: 47.88
 punto de fusión: 1666 °C
 punto de ebullición: 3358 °C

Sumando miembro a miembro las desigualdades anteriores, resulta:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{c-1}) = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{c-1} + C - 1 - 1,$$

o sea,

$$A = V + C - 2.$$

O bien, como queríamos demostrar:⁴ $C - A + V = 2$.

En este trabajo presentamos la relación de la Fórmula de Euler con la topología (en realidad, es el primer resultado publicado sobre esta rama de las matemáticas, como ya decíamos), con la geometría elemental, vía los sólidos platónicos y los sólidos arquimedianos (algunos afirman que este resultado es el “único teorema de geometría que no descubrieron los griegos”) y relaciones diversas con otras ramas de las matemáticas, así como problemas y ejercicios. Se añaden, además, 18 demostraciones de este resultado que pueden servir para ilustrar los puntos de contacto antes citados. Dos resultados independientes, con serias repercusiones en la geometría como son el Teorema de Pick y el Teorema de la Curva de Jordan, se presentan en los anexos para completar varias de las demostraciones tratadas.

1. LA FÓRMULA DE EULER PARA LA ESFERA

Hablando *grosso modo*, una red o, como dirían los matemáticos, un grafo, es una colección de puntos (llamados vértices) y líneas que los unen (llamadas aristas). Cada arista une sólo dos vértices (uno en cada uno de sus extremos) y dos aristas no se deben cortar excepto en un vértice (qué será entonces un extremo común de las dos aristas). La colección de aristas forma el límite (la frontera) de ciertas áreas llamadas caras. Las caras no deben tener agujeros ni asas en ellas. Si dos caras tienen puntos frontera comunes, entonces deben compartir un vértice o una arista común (y sólo esto). En la figura 1 se muestran dos ejemplos de grafos (i) con 3 caras, 12 aristas y 10 vértices, y (ii) con 2 caras, 6 aristas y 5 vértices, respectivamente.

No es necesario asumir que las aristas en un grafo sean “líneas rectas”, pueden ser “curvas” de cualquier clase, siempre que no se corten o corten a otras. Es más, nosotros podemos dibujar tales grafos sobre cualquier superficie (por ejemplo un plano, una esfera, un cilindro, y así sucesivamente).

Un triangulación de una superficie es una red sobre la superficie, de tal forma que todas las caras sean triangulares, es decir, que estén limitadas por

⁴Consultar Crespo Crespo, Cecilia R., “Geometría: algunas consideraciones y sugerencias para la introducción del Teorema de Euler en la clase”, *Zona Educativa en el Aula* 10, pp. 2-7, Ministerio de Cultura y Educación, Buenos Aires, noviembre 1998.

[Ar] $3d^34s^2$

V

Vanadio

23

peso atómico: 50.9415
punto de fusión: 1917 °C
punto de ebullición: 3417 °C

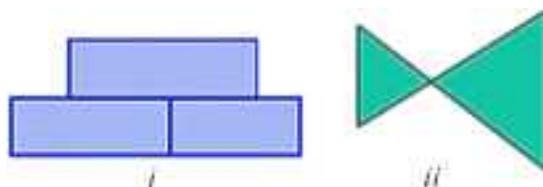


FIGURA 1.

tres aristas. De hecho, los agrimensores miden un campo por triangulaciones del mismo, con puntos vértices (normalmente en cimas de montañas) y midiendo ángulos y distancias entre estos puntos. En este caso los puntos son los vértices de la triangulación.

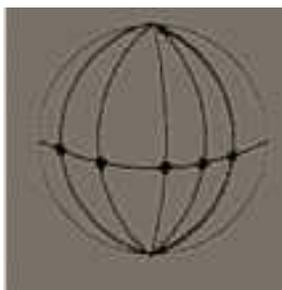


FIGURA 2.

El ejemplo más simple de una triangulación en la esfera (que nosotros pensamos como la superficie de la Tierra) se obtiene dibujando el ecuador y, digamos, n líneas de longitud. En este ejemplo, que se ilustra en la figura 2, hay $2n$ caras triangulares, $n+2$ vértices (n en el ecuador, y uno en cada polo) y $3n$ aristas, para que

$$(\text{número de caras}) - (\text{número de aristas}) + (\text{número de vértices}) = 2n - 3n + (n + 2) = 2.$$

Es quizás sorprendente que esta respuesta no dependa de la elección de n . Más notable aún es el hecho conocido como *Teorema de Euler*,⁵ que se cumple para todas las triangulaciones de la esfera. Así, para cualquier triangulación de la esfera con, digamos, T triángulos, A aristas y V vértices, la fórmula de Euler para la esfera es

$$T - A + V = 2.$$

Lo importante aquí es que esta fórmula es una invariante topológica; esto significa que si deformamos la triangulación y la esfera continuamente⁶, entonces los números T , A y V no cambiarán y la fórmula seguirá siendo cierta. Por ejemplo, cuando nosotros deformamos la esfera en un cubo, la fórmula seguirá siendo válida para el cubo; verificaremos esto con triangulaciones particulares del cubo. Dividamos cada cara del cubo en dos triángulos dibujando una diagonal por cada cara. Hay seis caras del cubo y cada una da dos triángulos, así, $T = 12$. Claramente $V = 8$ (no hay ningún nuevo vértices introducido cuando nosotros dibujamos las diagonales) y $A = 18$

[Ar] $3d^5 4s^1$

Cr

Cromo

24

peso atómico: 51.9961
punto de fusión: 1860 °C
punto de ebullición: 2679 °C

⁵Como dijimos, probablemente el matemático más productivo de todo los tiempos.

⁶Doblándola o estirándola, pero sin romperla.

(doce del cubo original y las seis diagonales agregadas). Así

$$T - A + V = 12 - 18 + 8 = 2.$$

Ejercicio 1. Verifique la Fórmula de Euler en cada uno de los casos siguientes (y en cada caso use triangulaciones diferentes):

- 1) para un tetraedro (una pirámide con una base triangular);
- 2) para la superficie formada uniendo dos tetraedros por su base;
- 3) para una pirámide con una base cuadrada como las que se encuentran en Egipto (recuerda que la base de la pirámide, donde la pirámide toca la tierra, es parte de la superficie de la pirámide);
- 4) para el octaedro (que es formado uniendo dos pirámides por su base);
- 5) la superficie formada uniendo dos pirámides, cada una con una base cuadrada, hacia dos caras diferentes de un cubo. Debe asumir que las caras del cubo son del mismo tamaño que las bases de las pirámides.

Ejercicio 2. Construya su propia superficie (por ejemplo, pegando varios cubos juntos), triángulela, y entonces verifique que la Fórmula de Euler “trabaja” para este caso.

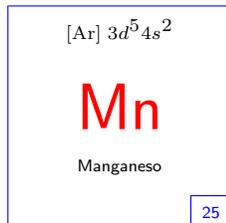
OBSERVACIÓN 1. ‘Construir’ aquí no significa que debe construir la superficie físicamente; parte de las matemáticas es aprender a representar tales objetos tridimensionales en una ¡hoja de papel!

OBSERVACIÓN 2. La superficie debe ser una esfera deformada. La Fórmula de Euler como fue dada antes no se cumple sobre la superficie de una rosquilla (un toro).

2. LA DEMOSTRACIÓN DE LEGENDRE DE LA FÓRMULA DE EULER PARA UNA ESFERA

La geometría de la esfera es sumamente importante; por ejemplo, cuando los navegantes (en naves o aviones) trabajan sus cursos por uno de los océanos deben usar la geometría de la esfera (y no la ¡geometría del plano!). En la geometría euclideana plana usual, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados (o π en radianes). En la superficie de la esfera el arco de distancia más corta entre dos puntos es el arco de un gran círculo en la esfera, y si nosotros formamos un triángulo ‘esférico’ con estos arcos como lados, entonces la suma de los ángulos interiores del triángulo no es 180 grados. Por ejemplo, si miramos el triángulo en la esfera limitado por el ecuador, el meridiano de Greenwich, y la línea de longitud dada por 90° Este, obtenemos un triángulo esférico donde los tres ángulos son de 90° . Llamemos a este triángulo D . Puede considerar qué otra suma de los ángulos interiores de un triángulo son posibles en la esfera.

Es un hecho que asumiremos aquí, que si un triángulo esférico está en una esfera de radio unidad y tiene, digamos, ángulos a_1 , a_2 y a_3 (medidos en radianes), entonces el área del triángulo es $a_1 + a_2 + a_3 - \pi$. Por supuesto,



peso atómico: 54.93805
 punto de fusión: 1246°C
 punto de ebullición: 2061°C

en la geometría euclidiana tendríamos $a_1 + a_2 + a_3 = \pi$, pero esta fórmula ya no es válida porque nuestro espacio es curvo. En su nivel más simple, la teoría de Einstein sobre el espacio-tiempo es que el espacio-tiempo en que vivimos es curvo y así las fórmulas físicas son diferentes a las que usamos en el espacio euclidiano.

Note que si aceptamos la fórmula anterior para el área de un triángulo esférico, el triángulo D construido anteriormente tendrá área $3(\pi/2) - \pi = \pi/2$. Como ocho copias de D llenarán la esfera sin solaparse, el área de la esfera (de radio unitario) es 4π .

Daremos ahora la elegante prueba de Legendre de la Fórmula de Euler, basada en una discusión simple de geometría esférica. Para cualquier triángulo en la esfera, tenemos

$$\text{Suma de los ángulos de un triángulo} = \text{área del triángulo} + \pi.$$

Suponga que hay T triángulos con A aristas y V vértices en la triangulación de la esfera. Entonces, sumando todos los ángulos en todos los triángulos, la suma del ángulo total es $2\pi V$ (porque todos los ángulos concurren a un vértice sin solaparse y el ángulo suma en cualquiera de los vértices de V es exactamente 2π). También, la suma de las áreas de los triángulos es el área de la esfera, a saber 4π ; así, tenemos que

$$2\pi V = 4\pi + T\pi,$$

o

$$V - \frac{T}{2} = 2.$$

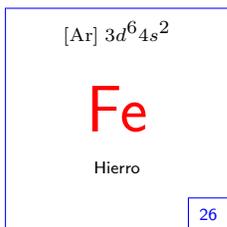
Ahora (contando las aristas de cada triángulo y notando que cuenta cada arista dos veces), obtenemos $3T = 2A$, o $A = 3T/2$. Así tenemos

$$T - A + V = T - \frac{3T}{2} + \left(2 + \frac{T}{2}\right) = 2,$$

que es la Fórmula de Euler.

3. LA FÓRMULA DE EULER PARA UN POLÍGONO CERRADO SIMPLE

Dado un polígono que no se corta a sí mismo, podemos triangular el interior del polígono en triángulos no-solapados tal que cualquiera dos triángulos se encuentran o a lo largo de un borde común, o un vértice común. Suponga que hay T triángulos, A aristas y V vértices, entonces la Fórmula de Euler para un polígono es $T - E + V = 1$.



peso atómico: 55.847
 punto de fusión: 1536 °C
 punto de ebullición: 2860 °C

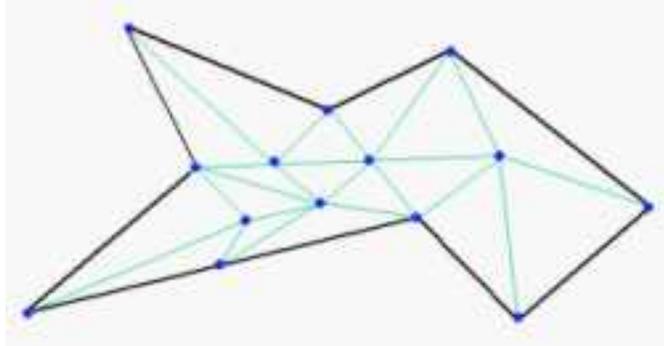


FIGURA 3.

EL lector puede confirmar esto en el polígono de la figura 3.

Ejercicio 3. Dibuje polígonos diferentes, triángúelos, y verifique que la Fórmula de Euler es cierta.

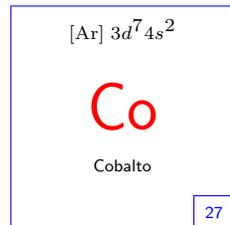
La prueba de la Fórmula de Euler para un polígono cerrado simple. Como los términos T , A y V permanecen inalterables cuando aplicamos un cambio continuo (o deformación) a la figura, podemos imaginar la figura dibujada en una hoja de caucho flexible. Recortamos el polígono de la hoja y lo manipulamos hasta que encaje exactamente en la mitad baja de una esfera que se apoya en un plano (por ejemplo, una mesa). Podemos considerarlo ahora como una triangulación del hemisferio bajo de esta esfera y usar términos geográficos, tales como ecuador y polo norte, para describir los puntos en la esfera. Habrá un cierto número de vértices, digamos N , en el ecuador de la esfera (exactamente el mismo número que en el límite del polígono original) y, como los vértices y las aristas se alternan en el ecuador, habrá también exactamente N aristas en el ecuador. Ahora dibujamos arcos del polo norte de la esfera a cada uno de estos N vértices (véase la figura 4). Esto nos dará una triangulación de la esfera con N nuevas caras triangulares, N nuevos bordes (todos del polo norte) y un nuevo vértice (en el polo norte). Así, de la Fórmula de Euler para la esfera,



FIGURA 4.

$$(T + N) - (A + N) + (V + 1) = 2,$$

y esto da la Fórmula de Euler para el polígono, a saber $T - E + V = 1$.



peso atómico: 58.9332
 punto de fusión: 1495 °C
 punto de ebullición: 2912 °C

4. LA FÓRMULA DE EULER CON CARAS POLIGONALES EN CUALQUIER SUPERFICIE

Hasta ahora hemos considerado la Fórmula de Euler con la red teniendo sólo caras triangulares en la superficie. De hecho, la fórmula también es válida cuando las caras son polígonos. El lector puede probar algunos ejemplos de esto para persuadirse que es así. Tomemos el ejemplo de un cubo con seis caras cuadradas, 12 aristas, 8 vértices y $6 - 12 + 8 = 2$.

Presentamos aquí un boceto de una prueba de la Fórmula de Euler para una esfera

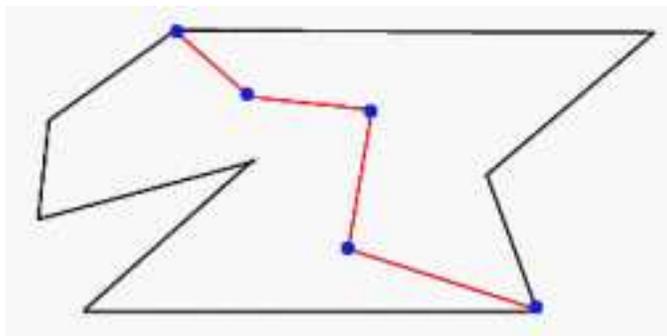
$$C - A + V = 2.$$

Algunos detalles se omiten, pero la idea general es clara.

Tomemos un polígono sobre la esfera. Suponga que tiene N vértices y N lados sobre la frontera del polígono. Hay dos caras (la interior y exterior del polígono) así para esta red tenemos

$$C - A + V = 2 - N + N = 2.$$

Suponga que unimos dos vértices por una curva poligonal, mostrada como una línea roja en el diagrama.

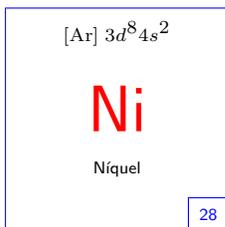


Para una curva general de este tipo, agregamos k nuevas aristas, $k - 1$ nuevos vértices (en la figura, $k = 4$) y el número de caras se aumenta en uno (una cara se divide en dos). Entonces para la nueva red

$$C_{\text{nueva}} - A_{\text{nueva}} + V_{\text{nueva}} = (C + 1) - (A + k) + (V + k - 1) = C - A + V = 2.$$

De la misma manera, podemos agregar otra línea sin cambiar $C - A + V$; así, podemos construir una red general para la que se tiene $C - A + V = 2$.

Para un polígono la prueba es muy semejante a la de la sección 3.



peso atómico: 58.6934
 punto de fusión: 1455 °C
 punto de ebullición: 2883 °C

5. LA FÓRMULA DE EULER PARA UN POLÍGONO CON AGUJEROS

Considere dos polígonos, uno dentro del otro; algunos ejemplos se dan en la figura 5. ¿Cuál es la fórmula de Euler para la región entre los dos polígonos? Dibuje distintas regiones de este tipo, triángúlelas de maneras diferentes y cuando halla alcanzado una respuesta experimentalmente, la pruebe y lo demuestra.

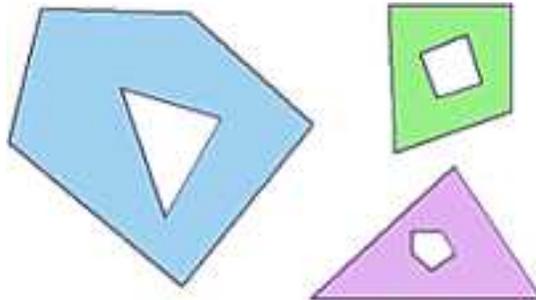


FIGURA 5.

Ahora intente encontrar la Fórmula de Euler para las regiones con dos o más agujeros como las de la figura 6.

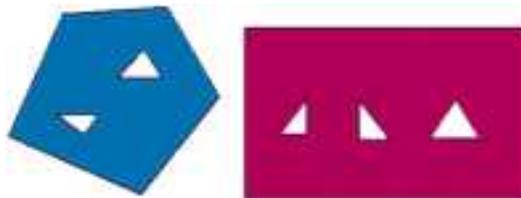
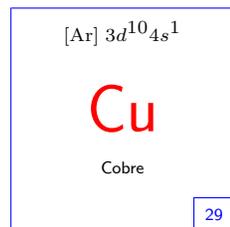


FIGURA 6.

6. LA FÓRMULA DE EULER PARA UN TUBO CUADRADO

Considere un tubo cuadrado sin los extremos como se ilustra en la figura 7, y considere triangulaciones que cubran el tubo entero, ¿cuál es su Fórmula de Euler? El lector debe dibujar triangulaciones diferentes y cuando haya alcanzado una respuesta experimentalmente debe probarla y demostrarla.

Cuando haya hecho esto, encuentre y pruebe la Fórmula de Euler para la rosquilla “doughnut” de la figura 8.



peso atómico: 63.546
 punto de fusión: 1085 °C
 punto de ebullición: 2570 °C

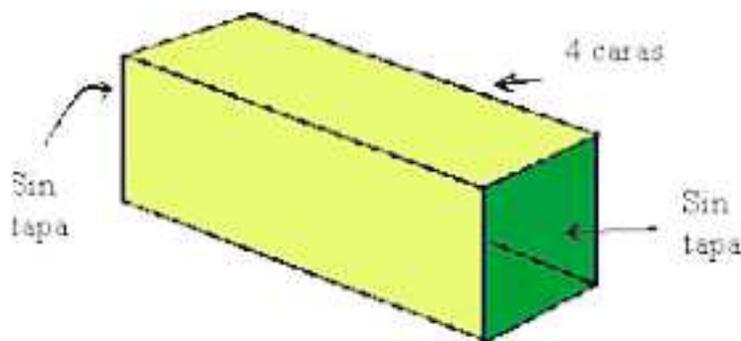


FIGURA 7.

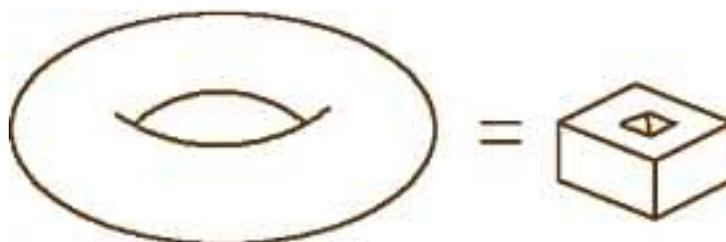


FIGURA 8.

7. EL ÁNGULO DE DEFICIENCIA DE UN POLIEDRO

Veremos una aplicación atractiva de la Fórmula de Euler. El ángulo de deficiencia de un vértice de un poliedro es 360° (o 2π en radianes) menos la suma de los ángulos en los vértices de las caras que se encuentran en el vértice. Para un cubo, por ejemplo, hay tres caras, cada una con un ángulo recto en cada vértice; así, el ángulo de deficiencia (en cada vértice) es $2\pi - 3(\pi/2) = \pi/2$ ($360^\circ - 3 \times 90^\circ = 90^\circ$), o 90 grados. El ángulo de deficiencia total para el cubo es $8 \times 90^\circ = 720^\circ$ (4π radianes). Es un hecho notable que el ángulo de deficiencia total de cualquier poliedro que sea topológicamente equivalente a una esfera es 720° o 4π en radianes.

Suponga que tenemos un poliedro construido con caras C_1, \dots, C_k (cada una de éstas es un polígono que no es necesariamente regular). Entonces podemos aplicar el Teorema de Euler al poliedro si contamos las caras, aristas y vértices. Por definición, hay k caras. Suponga que la cara C_j tiene N_j aristas (y por lo tanto N_j vértices). Si contamos el número total de bordes mirándolos por dentro de cada cara, “vemos” $N_1 + \dots + N_k$ aristas. Pero, por supuesto, vemos cada borde dos veces (para cada arista se ven de ambos lados); así,

$$2E = N_1 + \dots + N_k.$$

[Ar] $3d^{10}4s^2$

Zn

Cinc

30

peso atómico: 65.39
 punto de fusión: 419.6°C
 punto de ebullición: 907°C

Un hecho interesante aquí es que $N_1 + \dots + N_k$, inclusive, debe ser impar; aunque esto no es muy evidente. Finalmente, el número V de vértices está dado por la Fórmula de Euler para una esfera (o para cualquier esfera deformada), es decir,

$$V = A - C + 2 = (N_1 + \dots + N_k)/2 - k + 2,$$

o

$$2V = (N_1 + \dots + N_k) - 2k + 4.$$

El poliedro tiene V vértices y, por definición, el ángulo de deficiencia total del poliedro es en absoluto $2V$ menos la suma de los ángulos de todas las caras en todos los vértices. Como la suma del ángulo interior de un polígono con n lados es $(n-2)\pi$, tenemos que el ángulo de deficiencia total del poliedro es Θ , donde

$$\begin{aligned} \Theta &= 2(V - [(N_1 - 2)\pi + (N_2 - 2)\pi + \dots + (N_k - 2)\pi]) \\ &= 2\pi V - (N_1 + \dots + N_k)\pi + 2k\pi \\ &= \pi(2V - (N_1 + \dots + N_k) + 2k) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Así, tenemos demostrado el siguiente resultado

Teorema. *El ángulo de deficiencia total de cualquier poliedro es 4π .*

Ejemplo. Consideremos el tetraedro regular. Este tiene tres triángulos equiláteros que se encuentran en cada uno de sus cuatro vértices; así, en este caso,

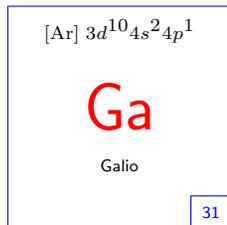
$$\Theta = 8\pi - 4 \times (3 \times \pi/3) = 4\pi.$$

Quizás al lector le gustaría probar con otros ejemplos.

El hecho de que el ángulo de deficiencia total de un poliedro sea 720 grados, junto con la Fórmula de Euler, da la llave para encontrar cuántos poliedros regulares hay (sólidos platónicos) y cuántos poliedros semiregulares hay (sólidos de Arquímedes), y descubrir sus propiedades (formas, número de caras, etc.), tal y como veremos en la sección 9.

8. SUMANDO NÚMEROS DE EULER

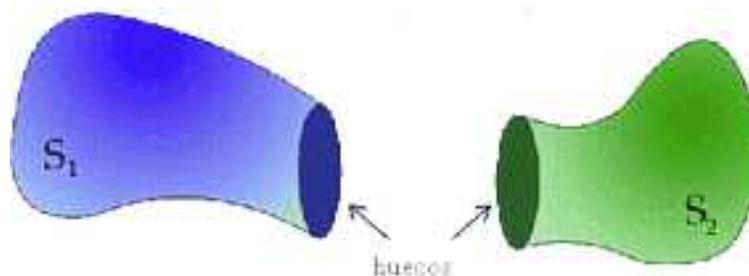
Vamos a mostrar que si unimos dos superficies por la frontera de un agujero en cada uno, entonces el número de Euler de la superficie unida es la suma



peso atómico: 69.723
punto de fusión: 29.77 °C
punto de ebullición: 2203 °C

de los números de Euler de las dos superficies separadas.

Suponga que tenemos dos superficies S_1 y S_2 , cada una con un agujero. Deformando las superficies, podemos asumir que los dos agujeros son redondos con el mismo radio, tal y como se ilustra debajo.



Ahora triangulemos ambas superficies de manera que haya exactamente k vértices y, por tanto, k aristas en cada una de las fronteras circulares de los agujeros. Deformando de nuevo las superficies podemos asumir que estos k vértices y k aristas se encuentran exactamente cuando las dos superficies se reúnen.

Suponga que la triangulación de S_1 tiene T_1 triángulos, A_1 aristas y V_1 vértices, y la triangulación de S_2 tiene T_2 triángulos, A_2 aristas y V_2 vértices. Cuando las superficies se han unido por los bordes de los dos agujeros redondos, tendremos una triangulación de la nueva superficie que llamaremos S , con exactamente $T_1 + T_2$ triángulos en ella. Sin embargo, no tendrá $A_1 + A_2$ aristas porque cada una de las k aristas en la frontera de un agujero se unirá a uno de los otros bordes en la otra frontera; así, la nueva triangulación tendrá exactamente $A_1 + A_2 - k$ aristas y, por analogía, $V_1 + V_2 - k$ vértices. Así

$$\begin{aligned} \text{Número de Euler } (S) &= (T_1 + T_2) - (A_1 + A_2 - k) + (V_1 + V_2 - k) \\ &= (T_1 - A_1 + V_1) + (T_2 - A_2 + V_2) \\ &= (S_1) + (S_2). \end{aligned}$$

Por ejemplo, un disco es topológicamente equivalente a un hemisferio y, por lo tanto, tienen el mismo número de Euler. Si unimos dos hemisferios por sus fronteras (por ejemplo, los hemisferios norte y sur se unen por el ecuador) vemos que los números de Euler de una esfera es dos veces el número de Euler de un hemisferio. Por lo tanto, el número de Euler de un hemisferio y de un disco es uno.

[Ar] $3d^{10}4s^24p^2$

Ge

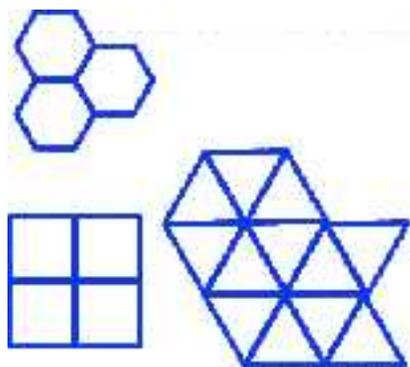
Germanio

32

peso atómico: 72.61
punto de fusión: 945 °C
punto de ebullición: 2850 °C

9. CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS REGULARES Y SEMIREGULARES

Los problemas de clasificación son importantes en muchos campos de las matemáticas. En topología, el principal problema es agrupar espacios topológicos en conjuntos de tal forma que todos los espacios en un conjunto dado sean topológicamente equivalentes⁷. Una forma de caracterizar estos conjuntos es asociar con los espacios ciertas entidades (frecuentemente números o grupos de números) los cuales sean esencialmente los mismos para todos los espacios en un conjunto dado. Tales entidades son llamadas invariantes topológicas, porque son las mismas para todos los espacios topológicamente equivalente. Ciertos invariantes pueden ser iguales para espacios no equivalentes; una clasificación completa sólo se obtiene cuando dos conjuntos no diferentes poseen todos sus invariantes iguales.



Un ejemplo de un invariante topológico ocurre en la Fórmula de Euler. El invariante aquí es $C - A + V$, su valor para poliedros ordenados es 2. Una generalización del teorema nos brinda el carácter invariante más claramente. Esta plantea que, si cualquier superficie cerrada es dividida en C regiones, por medio de A arcos (aristas), uniendo en pares V vértices tal que al menos dos aristas se encuentren en cada vértice, entonces la expresión⁸ $C - A + V$ es independiente del método de división de la superficie.

Los poliedros⁹ regulares se llaman sólidos platónicos y los semiregulares sólidos de Arquímedes, en honor de dos matemáticos griegos famosos¹⁰.

Así, podemos introducir una notación para describir el vértice formado por cada teselación. Esta notación, describiendo el número de aristas de cada polígono que se encuentra en un vértice de una teselación del sólido regular o semiregular, fue inventada por el matemático suizo Ludwig Schläfli (1814–1895). Un profesor de matemáticas de escuela, que hizo investigación matemática en su tiempo de descanso.

⁷Una introducción interesante al estudio de invariantes topológicos puede encontrarse en E. M. Paterson, *Topology*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1959.

⁸Llamada la Característica de Euler Ξ .

⁹Polígonos-*Figurae rectilineae*; poliedros-*Corpora bedris planis inclusa*.

¹⁰La primera mención de los trece sólidos arquimedianos es un manuscrito del quinto libro de la colección del matemático griego Pappus de Alejandria, quien vivió al comienzos de la cuarta centuria. Para la descripción de Pappus de los sólidos con modernas ilustraciones véase

<http://www.mcs.drexel.edu/~crrorres/Archimedes/Solids/Pappus.html>.

El lector puede encontrar ilustraciones de los sólidos poliédricos y mucha información interesante sobre estos sólidos y su construcción geométrica y práctica en el sitio mantenido por Tom Gettys en

<http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html>

[Ar] $3d^{10}4s^24p^3$

As

Arsénico

33

peso atómico: 74.92159
 punto de fusión: 816 °C
 punto de ebullición: 615 °C

Cada vértice en la teselación hexagonal está rodeado por tres polígonos de seis caras, por lo que decimos que la forma del vértice es 666.

La teselación cuadrada tiene vértice 4444.

De manera similar, cada uno del vértices en la teselación triangular está rodeado por polígonos de 3 lados y el vértice tiene forma 333333. Los ángulos interiores del triángulo, el cuadrado y hexágono son 60° , 90° y 120° respectivamente, y puede verse que la suma de los ángulos en un vértice en cualquiera de las tres teselaciones es 360° . Es claro que éstas son las únicas teselaciones regulares posibles del plano porque los pentágonos con ángulos interiores de 108° no pueden encajar juntos alrededor de un vértice, y para los polígonos con más de seis lados los ángulos interiores son mayores que 120° y es imposible unir tres o más alrededor de un vértice.

En cualquier sólido, el número de caras en un vértice debe ser mayor que dos. Comencemos con triángulos.

Usando sólo triángulos, cada vértice debe tener menos que 6 caras (sino, terminamos con una teselación del plano). Podemos unir tres 3-ágonos (*i.e.*, triángulos) para hacer un vértice con forma 333. Continuemos construyendo un sólido de tal manera que cada vértice tenga forma 333 y así llegamos al tetraedro con 4 caras triangulares.

Podemos unir cuatro 3-ágonos para hacer un vértice con vértice forma 3333 y este sólido es el octaedro con 8 caras triangulares.

Podemos unir cinco 3-ágonos para hacer un vértice con forma 33333 y este sólido es el icosaedro con 20 caras triangulares.

Tomemos ahora los cuadrados. Para hacer un sólido, debemos tener más de 2 caras en un vértice y menos de cuatro¹¹. Esto nos deja con el vértice de forma 444 y construimos el cubo (o hexaedro) con 6 caras cuadradas.

Luego viene el pentágono. Cada vértice de cualquier sólido debe tener más de 2 caras. Una vez más, el lector puede convencerse que no podemos tener un vértice de forma 5555, así que nos quedamos con el sólido regular con vértice forma 444 llamado el dodecaedro con 12 caras pentagonales.

Como dijimos antes, no podemos hacer un sólido regular con un polígono con seis o más lados¹².

De esta manera, hemos mostrado que hay cinco y sólo cinco sólidos regulares, y podemos empezar a completar la tabla siguiente.

Después de contar cuidadosamente los vértices y aristas —no es tan fácil como parece—, podemos completar las próximas dos columnas.

[Ar] $3d^{10}4s^24p^4$

Se

Selenio

34

peso atómico: 78.96
punto de fusión: 221°C
punto de ebullición: 685°C

¹¹¿Por qué menos que 4?

¹²¿Por qué?

LA FÓRMULA DE EULER Y LA TOPOLOGÍA

Nombre	Forma del vértice	$n(\text{caras})$ C	$n(\text{vértices})$ V	$n(\text{aristas})$ A	ángulo de deficiencia	ángulo total de deficiencia
Tetraedro	333	4				
Octaedro	3333	8				
Icosaedro	33333	20				
Cubo	444	6				
Dodecaedro	555	12				

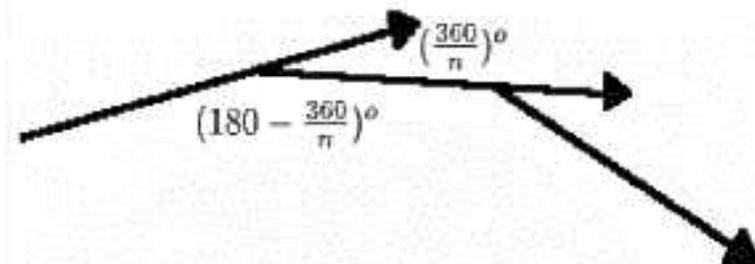
La conjetura de que $C + V - A = 2$ debe surgir de examinar los números de C , V y A . Esto es el famoso (y tan útil) Teorema de Euler. Aquí está planteado sólo como una conjetura al mirar la tabla, pero de hecho es cierto —encontrar una prueba es una tarea para el lector que disponga de tiempo, en caso contrario consulte la sección correspondiente a las demostraciones.

La próxima columna —ángulo de deficiencia— se trata en la sección 7.

Considere el tetraedro. Su forma de vértice es 333, así que la suma de los ángulos en cada uno de su vértices es $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ y decimos que el ángulo de deficiencia es de $360^\circ - 180^\circ$, o sea, 180° . Es lo que usted consigue si aplana el poliedro en un vértice y mide el ángulo faltante.

¿Puede ver que la suma del ángulo en el vértice de cualquier sólido debe ser menor que¹³ 360° ?

Definición. El ángulo de deficiencia en un vértice es 360° menos el ángulo suma en el vértice.



Podemos rellenar la próxima columna en la tabla con el ángulo de deficiencia por cada sólido platónico, pues sabemos el ángulo interior de cada n -ágono.

La diversión aquí nos devuelve un poco al plano, la idea es unir el ángulo de deficiencia con la curvatura y probar la fórmula para el ángulo interior de un n -ágono regular que es $(180 - 360/n)$ en grados. De esta fórmula vemos que los ángulos interiores de 3-, 4- y 5-ágonos son 60° , 90° y 108° , respectivamente.

¹³¿Por qué?

[Ar] $3d^{10}4s^24p^5$

Br

Bromo

35

peso atómico: 79.904
punto de fusión: -7.25°C
punto de ebullición: 59.35°C

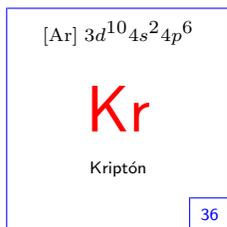
Si recorremos todo un círculo desde un punto de partida, recorreremos un ángulo total de 360 grados o (usando otra medida) 2π (radianes). Imagínese dando una vuelta a un n -ágono regular que empieza en uno de sus vértices. Ahora la curvatura, en lugar de extenderse uniformemente alrededor del borde, se concentra en los vértices. En cada vértice se hace lo mismo: se camina a lo largo de la próxima arista. Cuando se vuelve al punto de partida se ha recorrido un ángulo total de 360° . Cada uno de estos giros es por consiguiente de $360/n$ grados, el ángulo exterior al vértice. El ángulo interior es por consiguiente $(180 - 360/n)$ grados.

La columna final de la tabla —el ángulo total de deficiencia— es justo la suma de los ángulos de deficiencia en cada vértice de un sólido particular. Puesto que en cada caso la forma del vértice es la misma en cada vértice, podemos multiplicar simplemente el número de vértices (columna V) por el ángulo de deficiencia. Así, obtenemos la tabla siguiente.

<i>Nombre</i>	<i>Forma del vértice</i>	<i>n(caras) C</i>	<i>n(vértices) V</i>	<i>n(aristas) A</i>	<i>ángulo de deficiencia</i>	<i>ángulo total de deficiencia</i>
Tetraedro	333	4	4	6	180	720
Octaedro	3333	8	6	12	120	720
Icosaedro	33333	20	12	30	60	720
Cubo	444	6	8	12	90	720
Dodecaedro	555	12	20	30	36	720

Hemos concluido con el resultado de que el ángulo total de deficiencia para cada uno de los cinco sólidos platónicos es de 720° . Pero, ¿es cierto este resultado?, ¿es el ángulo total de deficiencia para cualquier sólido igual a 720° ? Es así, y puede tomarse ‘con confianza’, por ahora —pero debería verificarse mejor este resultado con algunos otros sólidos y podría intentarse buscar una prueba en internet o en algún libro. Nosotros hemos generalizado ideas en dos dimensiones (el plano) a tres dimensiones. En el plano la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es de 360° (o 2π radianes); ello se une al concepto de curvatura y al hecho de que en el límite cuando n tiende a infinito, se obtuvo un círculo de longitud 2π veces su radio. En el plano la constante 360 grados o 2π radianes desempeña el mismo papel que el ángulo total de deficiencia en tres dimensiones. El ángulo total de deficiencia para cualquier sólido es de 720 grados o 4π radianes. Se une ello al concepto de curvatura y al hecho de que en el límite cuando n tiende a infinito, obtenemos una esfera con área de la superficie de 4π veces el cuadrado de su radio.

Debilitemos ahora la condición de regularidad. Un sólido semiregular es aquel que se hace con más de un tipo de polígono, pero que en todos los



peso atómico: 83.8
 punto de fusión: -157.2°C
 punto de ebullición: -153.35°C

vértices tiene la misma forma del vértice.

Supongamos que escogemos que el vértice tiene forma 366 para que cada vértice sea rodeado a través de un 3-ágono y dos 6-ágonos. ¿Generará esta opción un sólido semiregular? y, en este caso, ¿cuántos hexágonos y cuántos triángulos necesitamos? Usaremos el Teorema de Euler y el teorema del ángulo total de deficiencia para ayudarnos a llenar otra fila en nuestra tabla, ya tenemos la segunda y la última columna.

<i>Nombre</i>	<i>Forma del vértice</i>	<i>n(caras) C</i>	<i>n(vértices) V</i>	<i>n(aristas) A</i>	<i>ángulo de deficiencia</i>	<i>ángulo total de deficiencia</i>
	366					720

Ahora pasamos por los siguientes pasos:

- Ángulo de deficiencia. Puesto que la forma del vértice es 366, el ángulo de deficiencia debe ser $360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$.
- Número de vértices. Puesto que todos los vértices tienen la misma forma, podemos dividir 720 por 60 para obtener el número de vértices, que resulta ser igual a 12.
- Número de aristas. Dado que cada vértice está rodeado por 3 caras (y por consiguiente por 3 aristas) podemos argumentar que el número de aristas es $12 \times 3 = 36$, pero siendo así, hemos contado las aristas dos veces¹⁴, entonces el número de aristas debe ser la mitad de 36, esto es 18.
- Número de caras. Use el Teorema de Euler $C + V - A = 2$; luego, $C = 8$.

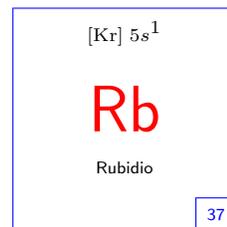
<i>Nombre</i>	<i>Forma del vértice</i>	<i>n(caras) C</i>	<i>n(vértices) V</i>	<i>n(aristas) A</i>	<i>ángulo de deficiencia</i>	<i>ángulo total de deficiencia</i>
	366	8	12	18	60	720

Pero, ¿cuántas de las 8 caras son triángulos y cuántas hexágonos?

Contemos los triángulos primero. Dado que cada vértice tiene un 3-ágono y hay 12 vértices, podemos obtener que el número de triángulos debe ser $12 \times 1 = 12$, pero siendo así, hemos contado cada triángulo 3 veces, una vez en cada uno de su vértices dado que cada triángulo tiene 3 vértices. Entonces el número de triángulos debe ser $12/3 = 4$.

Contemos los hexágonos ahora. Podríamos decir simplemente que son $8 - 4 = 4$, pero verifiquemos nuevamente. Dado que cada vértice tiene dos 6-ágonos y hay 12 vértices, podemos obtener que el número de hexágonos debe ser $12 \times 2 = 24$, pero siendo así, hemos contado el número de hexágonos 6

¹⁴¿Por qué?



peso atómico: 85.4678
 punto de fusión: 39.5 °C
 punto de ebullición: 697 °C

veces pues cada hexágono tiene 6 vértices. Entonces el número de hexágonos debe ser $24/6 = 4$.

Nombre	Forma del vértice	$n(\text{caras})$ C	$n(\text{vértices})$ V	$n(\text{aristas})$ A	ángulo de deficiencia	ángulo total de deficiencia
Tetraedro truncado	663	4 3-ágonos 4 6-ágonos	12	18	60	720

¿Por qué no sólo se escoge una posible forma del vértice y vemos lo que pasa? La forma del vértice debe ser tal que la suma del ángulo sea menor de 360° . Las cosas pueden salir mal. Por ejemplo, si escogemos un vértice de forma 335, vemos que el ángulo de deficiencia es de $360^\circ - 120^\circ - 108^\circ = 132^\circ$, que no divide 720° , por lo que no existe sólido semiregular con semejante forma del vértice.

Algunas formas de vértices producen prismas, como el 344 que es el prisma triangular que tiene tres caras cuadradas y dos caras triangulares. Otras formas del vértice producen antiprismas. Además de los prismas y antiprismas, se pueden producir todos los sólidos de Arquímedes, cuyos detalles están en la tabla siguiente. Por supuesto, puede preferir completar su propia tabla y entonces verificar sus resultados con la presentada a continuación.

Los 5 sólidos platónicos y los 13 sólidos arquimedianos

Nombre	Forma del vértice	$n(\text{caras})$ C	$n(\text{vértices})$ V	$n(\text{aristas})$ A	ángulo de deficiencia	ángulo total de deficiencia
Tetraedro	333	4	4	6	180	720
Cubo	444	6	8	12	90	720
Octaedro	3333	8	6	12	120	720
Dodecaedro	555	12	20	30	36	720
Icosaedro	33333	20	12	30	60	720
Tetraedro truncado	366	$8 = 4 + 4$	12	18	60	720
Cubo truncado	388	$14 = 8 + 6$	24	36	30	720
Octaedro truncado	466	$14 = 6 + 8$	24	36	30	720
Dodecaedro truncado	31010	$32 = 20 + 12$	60	90	12	720
Icosaedro truncado	566	$32 = 12 + 20$	60	90	12	720
Cuboctaedro	3434	$14 = 8 + 6$	12	24	60	720
Icosidodecaedro	3535	$32 = 20 + 12$	30	60	24	720
Snub dodecaedro	33335	$92 = 80 + 12$	60	150	12	720
Rombocuboctaedro	3444	$26 = 8 + 18$	24	48	30	720
Gran rombicosidodecaedro	4610 62	$62 = 30 + 20 + 12$	120	180	6	720
Rombicosidodecaedro	3454 62	$62 = 20 + 30 + 12$	60	120	12	720
Gran rombocuboctaedro	648	$26 = 8 + 12 + 6$	48	72	15	720
Snub cubo	33334	$38 = 32 + 6$	24	60	30	720

[Kr] 5s²

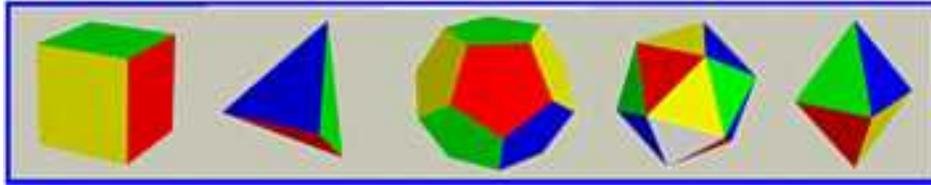
Sr

Estroncio

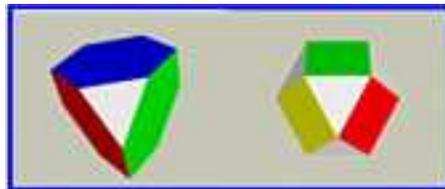
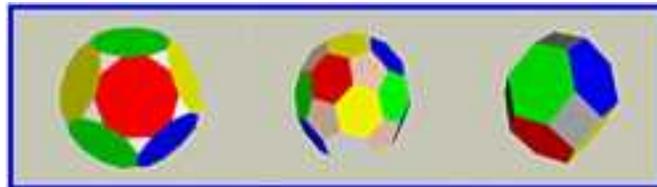
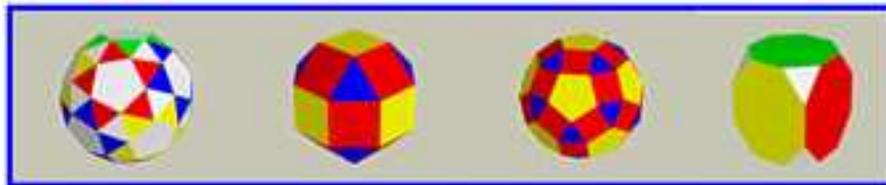
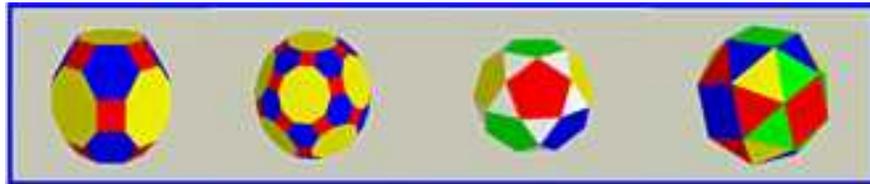
38

peso atómico: 87.62
 punto de fusión: 776.9 °C
 punto de ebullición: 1412 °C

LA FÓRMULA DE EULER Y LA TOPOLOGÍA



Los 5 sólidos platónicos: cubo, tetraedro, dodecaedro, icosaedro y octaedro.



Los 13 sólidos arquimedianos: cuboctaedro truncado, icosidodecaedro truncado, icosidodecaedro, cubo snub, dodecaedro snub, rombocuboctaedro, rombicododecaedro, cubo truncado, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, octaedro truncado, tetraedro truncado y cuboctaedro.

10. DIECIOCHO PRUEBAS DE LA FÓRMULA DE EULER¹⁵: $V - A + C = 2$

Muchos teoremas en las matemáticas son lo suficientemente importantes como para que se hayan demostrado repetidamente de muchas maneras dife-

¹⁵Véanse <http://www.ics.uci.edu/~epstein/junkyard/> y <http://www.ics.uci.edu/~epstein/junkyard/>

[Kr] 4d¹5s²

Y

Itrio

peso atómico: 88.90585
punto de fusión: 1530 °C
punto de ebullición: 3264 °C

rentes. Un ejemplo de esto incluye la existencia de infinitos números primos, la evaluación de la función zeta, el teorema fundamental del álgebra, reciprocidad cuadrática (una fórmula para probar si una progresión aritmética contiene un cuadrado) y el Teorema de Pitágoras (según Wells tiene 367 pruebas por lo menos). Esto también ocurre para teoremas insignificantes, como el hecho de que en cualquier rectángulo dividido en dos rectángulos menores, si cada rectángulo menor tiene anchura o altura entera, lo mismo es válido para el mayor.

Esta sección presenta varias pruebas de la Fórmula de Euler, que engloban caminos diferentes a los antes presentados.

Según Malkevitch, esta fórmula se descubrió alrededor de 1750 por Euler, y fue primero demostrado por Legendre en 1794. Antes, Descartes (alrededor de 1639) descubrió un invariante poliédrico (el ángulo de defecto total), pero al parecer no identificó la propia Fórmula de Euler. Hilton y Pederson proporcionan más referencias así como la entretenida especulación sobre el descubrimiento de Euler de la fórmula. Confusamente, otras ecuaciones como el $e^{i\pi} = -1$ y $a^{\phi(n)} = 1 \pmod{n}$ también pasan por el nombre de "la Fórmula de Euler", realmente Euler era un hombre muy ocupado.

La fórmula del poliedro, por supuesto, puede generalizarse de muchas maneras, algunas usan métodos descritos más adelante. Una generalización importante es a grafos planos. Para formar un gráfico plano de un poliedro coloque una fuente de luz cerca de una cara del poliedro, y un plano en el otro lado.

Las sombras de los bordes del poliedro forman un gráfico plano, incluido de una manera tal que los bordes son segmentos de línea recta. Las caras del poliedro corresponden a polígonos convexos. A la cara más cercana a la fuente le corresponde la cara externa de la proyección. Recíprocamente, cualquier grafo plano con ciertas propiedades de conectividad se transforman en un poliedro de esta manera.

Algunas de las pruebas descritas a continuación, usan sólo la topología del grafo plano, algún uso de la geometría proyectiva y algún uso de la geometría tridimensional del poliedro original. Los grafos en estas pruebas no son necesariamente simples: los bordes (aristas) pueden conectar un mismo vértice a sí mismo, y dos vértices pueden ser conectados por múltiples aristas. Algunas de las pruebas presentadas descansan en el Teorema de Jordan¹⁶, el que tiene múltiples demostraciones; como éstas en general no son basadas en la Fórmula de Euler, podemos usar la Curva de Jordan sin pecar de razonamiento circular.

[Kr] $4d^25s^2$

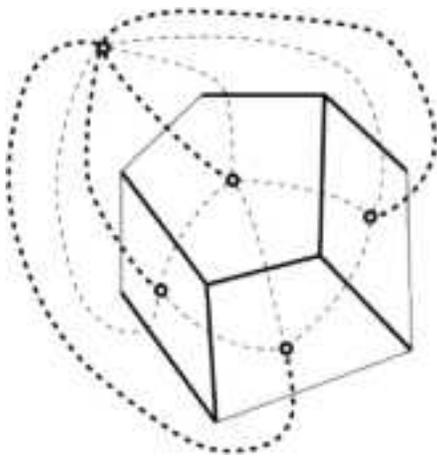
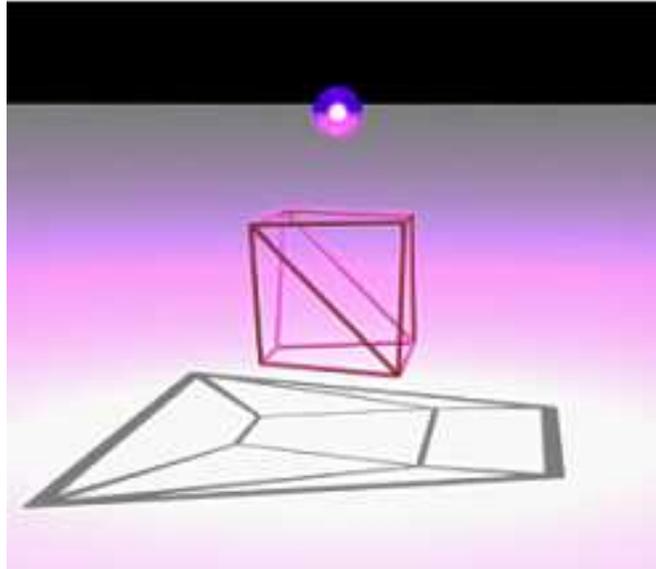
Zr

Circonio

40

peso atómico: 91.224
punto de fusión: 1852 °C
punto de ebullición: 4400 °C

¹⁶Véase anexo.



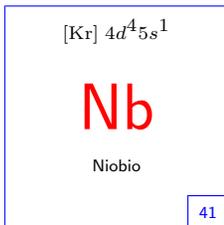
Prueba 1: Árboles entrelazados.

Para cualquiera grafo planar conector G definamos el grafo dual G^* dibujando un vértice en medio de cada cara de G y conectando los vértices de dos caras adyacentes por una curva e^* a través de la arista compartida e . Note que $G^{**} = G$. Cualquier ciclo en G hace desconexo a G^* por el teorema de la curva de Jordan. Cualquier subgrafo acíclico F de G es un bosque y ninguno hace desconexo a G^* (puede ir de cualquier cara a cualquier otra cara alrededor de los árboles en F).

Así la conexión y la aciclicidad son duales entre sí. Esta dualidad forma la base de la siguiente prueba:

Escoja cualquiera árbol T en G ; este es por definición un subgrafo conexo y acíclico. Las aristas duales del complemento, $(G - T)^*$ forman también un subgrafo conexo acíclico de G^* el cual es también un árbol. Los dos árboles tienen juntos $(V - 1) + (F - 1)$ aristas.

Ésta prueba es presentada en muchas ocasiones cuando se enseña teoría de grafos. Sommerville la atribuye a Von Staudt. Encaja bien con otros tópicos de dualidad planar tales como el hecho de que todo grafo planar con todas las caras iguales es bipartido (por la dualidad del recorrido de



peso atómico: 92.90638
 punto de fusión: 247 °C
 punto de ebullición: 4858 °C

Euler). Varias otras pruebas de la Fórmula de Euler tienen dos versiones, una en el grafo original y otro en su dual, pero esta prueba es asimismo dual como es la propia Fórmula de Euler.

La idea de descomponer un grafo en los árboles entrelazados ha demostrado ser útil en varios algoritmos y áreas de la programación.

Prueba 2: Inducción sobre las caras.

Podemos demostrar la fórmula para todos los grafos conexos planos, por inducción sobre el número de caras de G .

Si G tiene sólo una cara, es acíclico (por el teorema de la curva de Jordan) y conexo, es un árbol y $A = V - 1$. Por otra parte, escojamos una arista e que conecte dos caras diferentes de G , quítelo; e puede aparecer entonces sólo una vez en la frontera de cada cara, así el grafo sigue siendo conexo —cualquier camino que involucra a e puede reemplazarse por un camino alrededor del otro lado de una de las dos caras. Esta eliminación de e , disminuye tanto el número de caras como de aristas y el resultado se sigue entonces por inducción.

Esta prueba normalmente aparece en los libros de texto de teoría de grafos (por ejemplo, Bondy y Murty) pero goza de menos favor: es innecesariamente complicada y no es elegante, la justificación completa de algunos de los pasos parece ser algo como el mismo trabajo de toda la primera prueba; no se generaliza muy bien y existen algunos detalles críticos que los autores de libros de texto prefieren omitir a menudo.

Prueba 3: Inducción sobre los vértices.

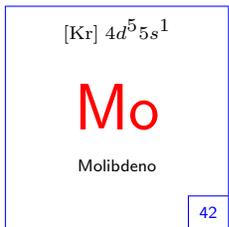
Este argumento es dual plano de la prueba por inducción sobre las caras.

Si G tiene sólo un vértice, cada arista es una curva de Jordan, así existen $A + 1$ caras y $C + V - A = (A + 1) + 1 - A = 2$. Por otra parte, escojamos una arista e que conecte dos vértices diferentes de G , contraígalo. Esto disminuye el número de vértices y aristas en uno, y el resultado se obtiene entonces por inducción.

Prueba 4: Inducción sobre las aristas.

Combinando las dos pruebas anteriores conseguimos una inducción con un caso base mucho más simple.

Si el grafo planar conexo G no tiene ninguna arista, es un vértice aislado y $V + C - A = 1 + 1 - 0 = 2$. Por otra parte, escojamos cualquier arista e . Si e conecta dos vértices, vamos a contraerlo, reduciendo V y A en uno. Por otra parte, esta arista es una curva de Jordan y separa dos caras; quítela y reduzca C y A en uno. EL otro caso se sigue por inducción.



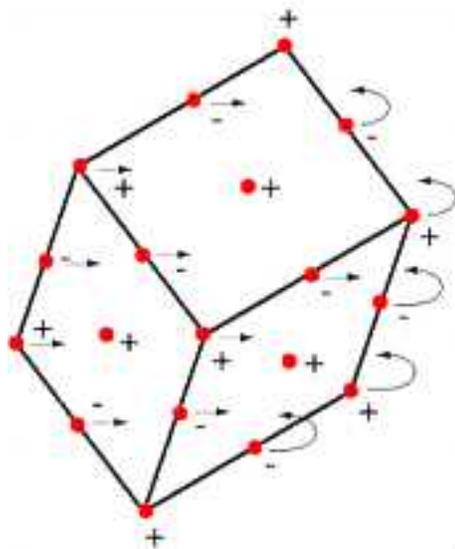
peso atómico: 95.94
 punto de fusión: 2623 °C
 punto de ebullición: 4679 °C

Ésta es la prueba usada por van Lint y Wilson. Otras variantes son posibles —si e conecta dos vértices y separa dos caras, podemos escoger varias maneras de anular o acortar e .

Prueba 5: Divide y vencerás.

Esta prueba la encontró Alex Bogomolny en una traducción rusa (1958) de la séptima edición de la *Geometría elemental* de J. Hadamard (vol. 2). Está muy relacionada con la prueba por descomposición del asa.

La prueba es por inducción sobre el número del caras. Antes que todo, quite una cara y demuestra la fórmula $V - A + C = 1$ para superficies poliédricas abiertas. Para una sola cara la fórmula obviamente se cumple. Asuma que se cumple para un número menor de caras que C y considere una superficie con un número C de caras. Corte dos vértices de la frontera (por la cara faltante) de la superficie y conéctelos por una cadena de aristas interiores. (La existencia de una tal cadena se sigue del teorema de la curva de Jordan.) Ahora corte a lo largo de la cadena. Se obtienen dos superficies para las que la fórmula $V - A + C = 1$ se cumple. Para la primera, sea $V_1 - A_1 + C_1 = 1$ y para la segunda $V_2 - A_2 + C_2 = 1$. Asuma que la cadena contiene L aristas y por tanto $(L + 1)$ vértices. Se sigue entonces que $A_1 + A_2 = A + L$ y así $V_1 + V_2 = V + L + 1$. Por supuesto que $C_1 + C_2 = C$. Sumando (algebraicamente) se obtiene el resultado deseado.



Se puede usar también una versión dual de la prueba, en la cual un disco abierto (inicialmente formado quitando un vértice del poliedro) se descompone encontrándose sucesiones alternadas de aristas y caras.

Prueba 6: Carga eléctrica.

Esta prueba es debida a Thurston:

Coloque el poliedro en el espacio, de tal forma que ningún borde esté horizontal —y que exista exactamente un vértice superior S y un vértice inferior I . Ponga una carga unitaria positiva en cada vértice, una carga unitaria negativa en el centro de cada cara. Mostraremos que todas las cargas se cancelan excepto aquellas en I y S . Para hacer esto, desplazemos todas las cargas de las aristas y los vértices de una cara vecina y agrupémoslas en cada cara. La dirección del movimiento

remos que todas las cargas se cancelan excepto aquellas en I y S . Para hacer esto, desplazemos todas las cargas de las aristas y los vértices de una cara vecina y agrupémoslas en cada cara. La dirección del movimiento

[Kr] 4d ⁵ 5s ²
Tc
Tecnecio
43

peso atómico: 97.9072
 punto de fusión: 2200 °C
 punto de ebullición: 4567 °C

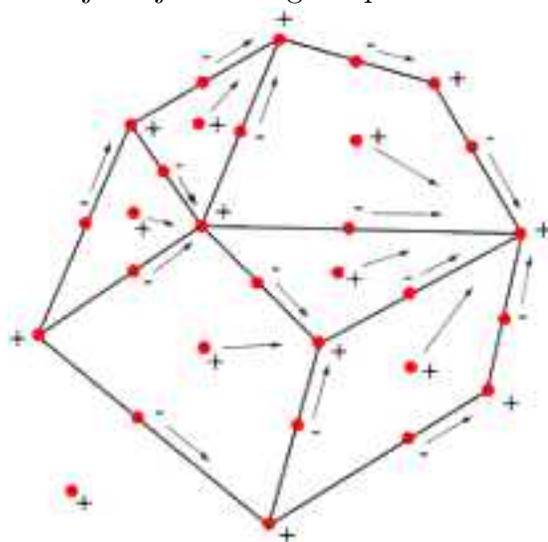
queda determinada por la regla que dice que cada carga se mueve en su correspondiente cara, vista horizontalmente, contrario a las agujas del reloj.

De esta manera, cada cara recibe la carga neta de un intervalo abierto, sobre sus fronteras. Este intervalo abierto se descompone en aristas y vértices que se alternan. Puesto que el primero y el último son aristas, existe un sobrante de negativo; por consiguiente, la carga total en cada cara es cero. Todo lo cual nos deja $+2$, para S e I .

Thurston generaliza esta idea en una prueba que dice que la Característica de Euler es un invariante de cualquiera variedad diferenciable triangulada.

Prueba 7: El dual de la carga eléctrica.

En lugar de agrupar las cargas en las caras del gráfico, podemos dar un argumento dual en el que se agrupan las cargas en vértices. Esta prueba trabaja mejor con el grafo planar convexo inmerso en el grafo de un poliedro.



Rote el grafo si es necesario para que ninguna arista esté vertical. Como en la prueba anterior, ponga una carga unitaria positiva en cada vértice, una carga unitaria negativa en el centro de cada arista, y una carga unitaria positiva en medio de cada cara. Mostraremos que todas las cargas, menos dos positivas, se cancelan. Para hacer esto, desplace la carga en cada arista a su vértice derecho, cambie de sitio la carga en cada cara (excepto la cara exterior) a su vértice más a la derecha. Cada vértice (excepto el vértice situado más a la izquierda)

recibe las cargas de una sucesión en la que se alternan aristas y caras, cancelando su carga inicial. Las únicas cargas que quedan sin cancelar son una carga positiva sobre la cara exterior y una carga positiva en el vértice más a la izquierda.

Prueba 8: Suma de ángulos.

Esta prueba usa el hecho que el grafo planar formado por el poliedro puede considerarse inmerso para que todos las aristas formen segmentos de líneas rectas.

$[Kr] 4d^7 5s^1$

Ru

Rutenio

44

peso atómico: 101.07
punto de fusión: 2310 °C
punto de ebullición: 4119 °C

Sume los ángulos en cada cara de una línea recta del grafo (incluyendo la cara exterior); la suma de ángulos en un k -ágono es $(k - 2)\pi$, y cada arista contribuye con dos caras, así la suma total es $(2A - 2C)\pi$.

Ahora contemos los mismos ángulos de otra manera. Cada vértice interior se rodea por triángulos y contribuye con un ángulo total de 2π la suma. Los vértices sobre la cara exterior contribuyen $2\pi(-\theta(v))$, donde θ denota el ángulo exterior del polígono. El ángulo exterior de cualquier polígono es 2π ; así, el ángulo total es $2\pi V - 4\pi$.

Combinando estas dos fórmulas y dividiendo por 2π , vemos que $V - 2 = A - C$, o equivalentemente $V - A + C = 2$.

Sommerville, atribuye esta prueba a Lhuillier y Steiner. Hilton y Pederson usan los ángulos de una manera similar a la relación de la característica de Euler de una superficie poliédrica con su ángulo de defecto total.

Prueba 9: Ángulos esféricos.

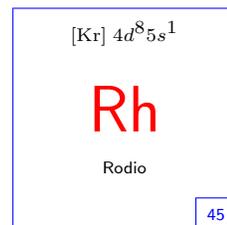
La prueba por las sumas de los ángulos trabaja más limpiamente en lo que se refiere a las triangulaciones esféricas, principalmente porque en esta formulación no se distingue la “cara exterior” para causar complicaciones en la prueba.

Necesitamos el siguiente hecho básico de la trigonometría esférica: si normalizamos el área de la superficie de una esfera a 4π , y miramos cualquier triángulo definido por los grandes arcos de círculo en la esfera, la suma de los tres ángulos interiores es $\pi + a$, donde a (el *exceso* del triángulo) es igual al área de la superficie del triángulo (véase por ejemplo Wells, 1995, pág. 238).

Para convertir nuestra pregunta en el poliedro a una de geometría esférica, primero triangulemos el poliedro; cada nueva arista aumenta A y C en uno cada uno, para que $V - A + C$ quede inalterable. Ahora realice un experimento de luz similar al descrito al comienzo de la sección: ubique la fuente de iluminación en un punto interior del poliedro, y ponga una pantalla esférica fuera del poliedro que tiene la fuente de iluminación como su centro. Las sombras lanzadas en la pantalla por los bordes del poliedro formarán una triangulación esférica. Puesto que cada arista está en dos triángulos y cada triángulo tiene tres aristas, $2A = 3C$.

Sumemos ahora los ángulos de todos los triángulos; por la trigonometría esférica descrita arriba, la suma es $(4 + C)\pi$. Agregando los mismos ángulos de otra manera, por lo que se refiere a los vértices, da un total de $2V\pi$. Puesto que estas dos sumas miden el mismo conjunto de ángulos, $C = 2V - 4$ y combinando esto con la otra ecuación $2A = 3C$ da el resultado esperado.

Sommerville atribuye esta prueba a Legendre. Debido a sus conexiones con la topología geométrica, ésta es la prueba usada por Weeks que también



peso atómico: 102.9055
 punto de fusión: 1960 °C
 punto de ebullición: 3727 °C

da una prueba elegante de la relación ángulo esférico-área, basada en la inclusión-exclusión de cuñas dobles en circulares.

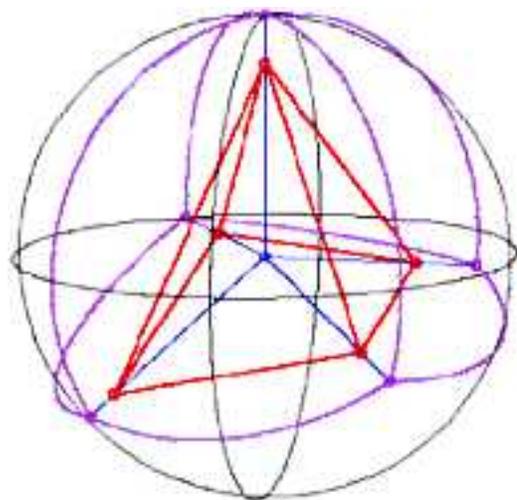
La relación $A*k = 2\pi(V - A + C)$ en una superficie de curvatura constante k , tal como la esfera, es una forma de la fórmula de Gauss-Bonnet de la geometría diferencial.

La prueba presentada, tiene la siguiente variante.

Prueba 9': Ángulos esféricos.

Usaremos el teorema de Girard y su extensión a los polígonos esféricos para derivar y demostrar la famosa fórmula de Euler. Vamos a comenzar ésta como un teorema.

Teorema. *Sea P un poliedro convexo con vértices V , A aristas y C caras, entonces $V - A + C = 2$.*



Comenzaremos la prueba escogiendo un punto C dentro de P . Dado que P es convexo, el segmento que une C a cualquier punto dentro del poliedro P , o sobre P mismo, queda enteramente dentro de P . Ahora escogamos un radio R tan grande que la esfera con centro C y radio R contenga el poliedro P . Apliquemos el poliedro sobre la esfera con una proyección central de C . Esto significa que por cada punto sobre el poliedro, tomamos la línea de C a través del punto y trazamos el punto de intersección de esta línea con la esfera.

Esto se ilustra en la figura de la izquierda. El poliedro original se indica en la red, y las líneas azules muestran cómo los vértices se trazan sobre la esfera. Las líneas negras son la referencia de los grandes círculos en la esfera y la púrpura es la imagen del poliedro.

Una manera buena de visualizar la proyección central es considerar lo que pasa si ponemos una luz en el centro de la esfera. Entonces el resultado de la proyección central es la sombra del poliedro en la esfera.

Es importante entender lo que pasa a una arista del poliedro bajo la proyección central. Una arista es un segmento de una línea. Esa línea y el centro determinan un único plano. El segmento de C a cualquier punto del borde queda completamente en este plano, y el plano corta la esfera en un gran círculo. Por lo tanto, la imagen de una arista es un segmento

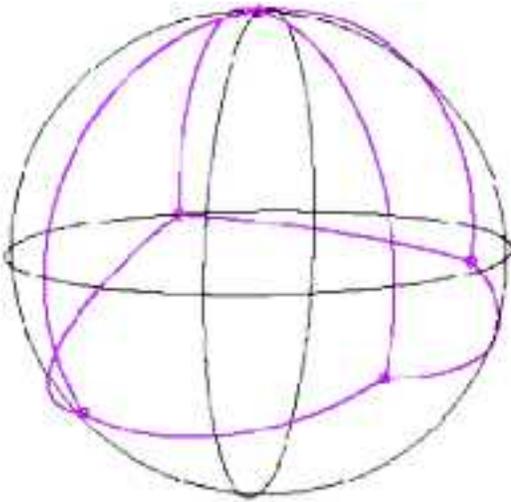
[Kr] $4d^{10}$

Pd

Paladio

46

peso atómico: 106.42
punto de fusión: 1552 °C
punto de ebullición: 2940 °C



de un gran círculo en la esfera. Esto significa que cada cara del poliedro se proyecta en un polígono esférico, y el poliedro se proyecta hacia un poliedro esférico que simplemente es una imagen curvada del original. (En la figura ésta es la configuración púrpura). El poliedro esférico tiene V vértices, A aristas y C caras, exactamente como P . Además, puesto que el centro de la esfera fue escogido dentro de P , el poliedro esférico cubre la esfera entera. Por lo tanto, el poliedro esférico es una división de la esfera en F polígonos esféricos disjuntos que llamaremos Q_1, \dots, Q_F .

La segunda figura muestra las marcas de la esfera determinadas por el poliedro en la primera figura.

Apliquemos el teorema de Girard al polígono Q_i . Realmente, usaremos la extensión del teorema de Girard a los polígonos esféricos. Sea e_i el número de lados de Q_i . Entonces, la suma de los ángulos de Q_i está dada por la expresión $(e_i - 2) + \text{área}(Q_i)/R^2$.

Sumando esto sobre las caras obtenemos

$$\sum_{i=1}^F \text{suma de ángulos de } Q_i = \sum_{i=1}^F (e_i - 2) + \sum_{i=1}^F \text{área}(Q_i)/R^2$$

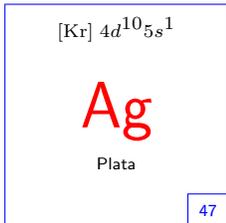
Examinaremos cada uno de estas sumas. En cada caso, podremos encontrar la suma por las medias geométrica.

Aunque parece muy complicado, la primera suma es simplemente la suma de todos los ángulos en el poliedro esférico. Recordemos de nuevo la suma. En lugar de agruparse los ángulos por la cara a que pertenecen, agrupémoslos por su vértice. Puesto que el poliedro esférico cubre la esfera, en cualquier vértice los ángulos de ese vértice llenan 2 radianes enteros. Así, los ángulos en cada vértice contribuyen 2π a la suma, y multiplicando por el número de vértices, vemos que la primera suma es igual a $2\pi V$.

Desdoblemos la segunda suma en dos sumandos.

$$\sum_{i=1}^F (e_i - 2) = \sum_{i=1}^F e_i - \sum_{i=1}^F 2$$

La primera suma es π veces el número total de aristas de todas las caras.



peso atómico: 107.8682
 punto de fusión: 961 °C
 punto de ebullición: 2195 °C

Note que cada arista del poliedro esférico separa dos caras. Puesto que estamos sumando sobre las caras, cada arista del poliedro está dos veces en esta suma. Por consiguiente

$$\sum_{i=1}^F e_i \pi = 2\pi E.$$

La segunda suma simplemente es

$$\sum_{i=1}^F 2\pi = 2\pi F.$$

Finalmente, puesto que los polígonos son disjuntos y cubren la esfera entera, tenemos

$$\sum_{i=1}^F \text{área}(Q_i)/R^2 = \text{área}(S)/R^2 = 4\pi.$$

Reuniendo todo esto conseguimos

$$2\pi V = 2\pi E - 2\pi F + 4\pi.$$

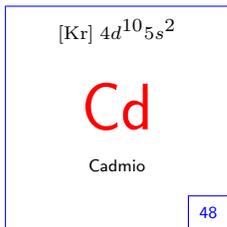
Dividiendo por 2π y reordenando, obtenemos la fórmula de Euler:

$$V - A + C = 2.$$

Prueba 10: El teorema de Pick.

Hemos convertido nuestra prueba de suma de ángulos a la trigonometría esférica, y en el proceso hemos obtenido las fórmulas en términos de la suma de áreas de las caras. Ahora examinaremos fórmulas similares para sumas de áreas en la geometría plana, siguiendo una sugerencia de Wells.

La herramienta básica aquí es el teorema de Pick¹⁷: en cualquier polígono P dibujado para que sus vértices estén en los puntos (x, y) donde x e y son ambos enteros, el área de P puede expresarse como $N + B/2 - 1$, donde N es el número entero de los puntos interiores y B es el número entero de puntos frontera (aristas) y vértices de P . Esto puede demostrarse de varias maneras, por ejemplo, escogiendo una línea horizontal L que pasa por debajo del polígono y dividiendo el área del polígono en la suma de las áreas de los trapezoides de L a cada arista. Estas pruebas no requieren la fórmula de Euler, así que no hay ningún peligro de razonamiento circular.



peso atómico: 112.411
 punto de fusión: 320.8° C
 punto de ebullición: 770° C

¹⁷El teorema de Pick, enviado para su publicación.

Primero dibuje el grafo planar que corresponde al polígono, con las aristas como segmento de línea recta. Es posible escoger un radio suficientemente pequeño, r , tal que si movemos cada vértice en alguna parte dentro de un círculo de dicho radio centrado en su posición original, el grafo resultante seguirá siendo plano; amplíe el grafo para que $r = 1$. Entonces mueva cada vértice al vértice del entero más cercano; el resultado es un grafo planar equivalente dibujado en el enrejado.

La cara exterior del gráfico se cubre precisamente una vez por las caras restantes, así, la suma de las áreas de las caras restantes debe igualar el área de la cara exterior. Esta suma de áreas es, por el teorema de Pick, $I + X + B/2 + S/2 - (F - 1)$, donde I es el número de los puntos interiores a una de las caras, X es el número de puntos en un borde interior (cada uno de los cuales cuenta $1/2$ en cada una de dos caras), S es la suma (en todos los vértices) del número de caras interiores a las que el vértice pertenece, y el término $(F - 1)$ resulta de agregar el término -1 en cada una de las $F - 1$ aplicaciones del teorema de Pick.

Un vértice interior al grafo contribuye con un término S igual a su grado, considerando que un vértice en la cara exterior contribuye sólo con su grado menos 1. Por consiguiente, $S = 2E - K$, donde K es el número de vértices en la cara exterior. Además, por el teorema de Pick, el área de la cara exterior es $(I + X + V - K) + (B + K)/2 - 1$. Combinando las dos ecuaciones anteriores nos da el resultado esperado.

Desafortunadamente, el teorema de Pick no se generaliza a dimensiones superiores, por lo que este acercamiento es improbable que pueda “trabajar” para demostrar variantes de la fórmula de Euler en dimensiones superiores.

Prueba 11: Descomposición del asa.

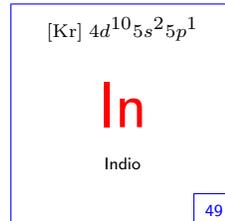
Prueba 12: Descascarando.

Prueba 13: Quitando el triángulo.

Esta prueba es solamente una variación de la de “descascarar”, pero está incluida aquí por su importancia histórica, la usó Cauchy y la examinó profundamente Lakatos.

Comencemos con un grafo planar convexo dibujado de las aristas del poliedro. Si hay una cara no-triangular, agreguemos una diagonal a la cara, dividiéndola en dos y agregando uno a los números de aristas y caras; el resultado se sigue entonces por inducción.

Suponga que tenemos cualquier grafo planar con todas las caras interiores triangulares, con por lo menos dos caras así, y con la propiedad adicional de que uno puede unir cualquier punto interior a cualquier otro por un camino que evite el límite de la cara exterior del grafo. (La triangulación



peso atómico: 114.82
 punto de fusión: 156.61 ° C
 punto de ebullición: 2080 ° C

del dibujo convexo de nuestro poliedro claramente satisface estas propiedades.) Entonces, existen siempre por lo menos dos triángulos que tienen los bordes en este límite, tal que al quitar uno cualquiera de los dos deja un solo triángulo o un grafo menor del mismo tipo; esto puede demostrarse por inducción sobre el número de triángulos, para el caso en que si algún triángulo del límite desconecta los puntos interiores, los dos componentes desconectados en sus dos bordes del no-límite o deben ser sólo los triángulos (los cuales son suprimibles) o tiene (por inducción) dos triángulos fronteras trasladables, con por lo menos uno de los cuales será trasladable en el grafo global.

Por lo tanto, quite los triángulos límite uno por uno; en cada paso quitamos o una arista o una cara, o dos aristas, una cara y un vértice. En todos los casos $V - A + C$ permanece inalterable. Finalmente, obtenemos un grafo formado por un solo triángulo en el cual $V - A + C = 3 - 3 + 2 = 2$.

El análisis en versiones multidimensionales de esta prueba se relaciona estrechamente con el teorema de Radón, en el que cualquier punto $d + 2$ puede dividirse en dos subconjuntos con cáscaras convexas y “arrojar” los algoritmos basados en construir triangulaciones de Delaunay y cáscaras convexas.

Prueba 14: El arca de Noé.

Prueba 15: Homología binaria.

Prueba 16: Partición espacial binaria.

Prueba 17: Valoraciones.

Helena Verrill ha mostrado que la fórmula de Euler es equivalente al hecho de que cada variedad teórica sobre $GF[p]$ posee un número de puntos igual a $1 \pmod{p}$, pero todavía no se tiene una buena prueba no-combinatoria de este último hecho.

Sería posible construir las inducciones basadas en la representación de poliedros convexos como las intersecciones de semiespacios o cáscaras convexas de puntos, pero la necesidad de ocuparse de entradas en posiciones no generales haría las pruebas resultantes bastante desprolijas.

También parece haber una conexión potencial con los binomios: si uno define un polinomio $p(t) = 1 + Vt + Et^2 + Ft^3 + t^4$, la fórmula de Euler puede interpretarse afirmando que $p(t)$ es divisible por $1 + t$. Pero para *simplex* de cualquier dimensión, $p(t) = (1 + t)^{d+1}$ por la fórmula del binomio. Quizás exista una prueba de la fórmula de Euler que utilice estos polinomios directamente, en lugar de convertir cada una de las inducciones a una forma polinómica. Jim Propp se pregunta cuestiones similares

[Kr] $4d^{10}5s^25p^2$

Sn

Estaño

50

peso atómico: 118.71
punto de fusión: 232 °C
punto de ebullición: 2623 °C

para polítopos infinito-dimensionales, interpretando $p(t)$ como una serie de potencias.

Ejercicio 4.

- 1) Para un poliedro dado, sea C_i el número de caras i -ágonos. Entonces $3C_3 + 4C_4 + \dots = 2A$.
- 2) Para un poliedro dado, sea V_i el número de vértices que están sobre i filas (vértices i -valentes). Entonces $3V_3 + 4V_4 + \dots = 2A$.
- 3) $(2V_3 + 2V_4 + \dots) - (C_3 + 2C_4 + 3C_5 + \dots) = 4$.
- 4) $(2C_3 + 2C_4 + \dots) - (V_3 + 2V_4 + 3V_5 + \dots) = 4$.

REFERENCIAS

- [1] Bishop y Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, 1980.

Prueba la fórmula $p_1 - p_2 + p_3 = 2$, donde el valor p_i denota el número de mínimos locales, sillars y máximo locales sobre una superficie esférica.

- [2] Bondy, J. A. y U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.

Usa la inducción sobre las caras.

- [3] Euler, L., “Elementa doctrinae solidorum. —Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita”, *Novi comment acad. sc. imp. Petropol.* **4** 3, 1752, pp. 109, 140 y 160.

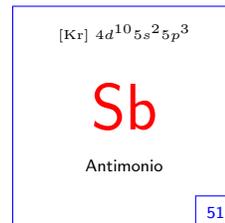
- [4] Hadamard, J., *Elementary Geometry*.

De acuerdo a Alex Bogomolny, la traducción rusa de 1958 contiene la prueba “divide y vencerás”.

- [5] Henle, *A Combinatorial Approach to Topology*, Freeman, 1979.

Este libro se utiliza en cursos de topología de grado. Presenta una historia de la fórmula de Euler, la cual sigue el *folklore* común (erróneamente, atribuido a Malkevitch) en el cual ésta es atribuida a Descartes, y no clarifica la prueba —Henle presenta la prueba de quitar el triángulo sin mencionar los requerimientos necesarios de cómo encontrar una tal sucesión.

- [6] Hilton y Pederson, “The Euler Characteristic and Pólya’s Dream”, *Amer. Math. Monthly* **103**, 1996, pp. 121–131.



peso atómico: 121.757
 punto de fusión: 630.7 °C
 punto de ebullición: 1635 °C

Este artículo proporciona alguna especulación de cómo Euler pudo haber encontrado su fórmula, relacionándolo a las teorías de Pólya de descubrimiento matemático. También contiene una prueba de la equivalencia entre la característica de Euler y el ángulo de deficiencia total, estrechamente relacionada a la prueba de la suma de ángulos presentada aquí.

- [7] Klain, D. A., y G.-C. Rota, “Introduction to Geometric Probability”, *Lezioni Lincee*, Cambridge University Press, 1997.

Muestra que la característica de Euler puede verse (*e.g.*, junto con el volumen y área de una superficie) como uno de los fundamentales invariantes ante funciones sobre uniones de conjuntos convexos. La prueba está en la sección 5.2; las otras secciones importantes relacionadas con la característica de Euler son la sección 3.2 (mostrando que la característica se define bien para los simpliciales complejos) y la sección 7.3 (generalizando la fórmula de Euler a otros volúmenes intrínsecos).

- [8] Lakatos, I., *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, 1976. (Existe la traducción al español: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1986.)

Utiliza la prueba de supresión de triángulos de la fórmula de Euler como un ejemplo importante para una investigación de qué significa una prueba matemáticos. También describe una prueba basada en la teoría de la homología binaria.

- [9] Legendre, M., *Éléments de géométrie*, París, 1794.

Acreditado por Sommerville como fuente de la prueba para la suma de ángulos esféricos.

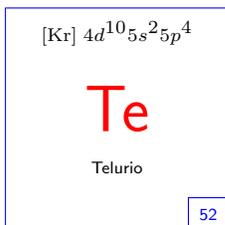
- [10] Lhuillier, S. A. J., “Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du théorème d’Euler sur les polyèdres, et un examen de diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti”, *Gergonne Ann. Math.* **3**, 1812, pág. 169.

Acreditado por Sommerville como fuente compartida (con Steiner) de la prueba para la suma de ángulos.

- [11] Lint, J. H. van y R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge, 1992.

Demuestra la fórmula de Euler vía inducción en las aristas. También mencionan, pero no demuestran, una generalización a polítopos de dimensiones más altas en su sección sobre la inversión de Möbius.

- [12] Malkevitch, J., “The First Proof of Euler’s Formula”, *Mitteilungen aus*



dem Mathem. Seminar Giessen, Heft 165, Teil III (Coxeter, Festschrift), pp. 77–82.

Describe la historia temprana de la fórmula, incluyendo su descubrimiento por Euler y la prueba por Legendre, refutando la teoría folklórica en que la fórmula fue descubierta, en cambio, por Descartes, y fue demostrada por Hirsch.

- [13] Sommerville, D. M. Y., *An Introduction to the Geometry of N Dimensions*, Dover, 1958.

Incluye un capítulo sobre la fórmula de Euler incluyendo las pruebas descascarando, suma de ángulos, suma esférica de ángulos y árboles entrelazados.

- [14] Steiner, J., “Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler”, *Crelle J.* **1**, 1826, pp. 364–367.

Acreditado por Sommerville como fuente compartida (con Lhuillier) de la prueba por suma de ángulos.

- [15] Thurston, W. P., *The Geometry and Topology of Three-Dimensional Manifolds*.

Estas notas inéditas (se distribuyó como contribución dentro de la comunidad de la topología) incluyen una prueba de la fórmula de Euler basada en la carga eléctrica.

- [16] Von Staudt, G. K. C., *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847.

Acreditado por Sommerville como fuente de la prueba árboles entrelazados.

- [17] Tverberg, H., “How to Cut a Convex Polytope into Simplices”, *Geometriae Dedicata* **3** (2), 1974, pp. 239–240.

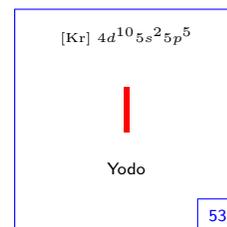
Demuestra que cualquier polítopo puede cortarse en simpliciales por una partición espacial binaria y usar esto como la base para una prueba de la fórmula de Euler.

- [18] Semanas, J., *The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds*, Dekker, 1985.

Demuestra la fórmula del exceso de área para esferas y usa ésta en la prueba de la suma esférica de ángulos de la fórmula de Euler.

- [19] Wells, D., *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin, 1991.

Incluye una descripción de la propiedad del exceso de área de la trigonometría esférica usada en la prueba de la suma esférica de ángulos, así como una pequeña mención



peso atómico: 126.90447
 punto de fusión: 113.6 °C
 punto de ebullición: 184.5 °C

de que el teorema de Pick es equivalente a la fórmula de Euler. Curiosamente, no hay ninguna sección para la fórmula de Euler propiamente dicha.

- [20] Ziegler, G., *Lectures on Polytopes*, Springer, 1995.

Presenta una prueba de la fórmula de Euler basada en el descascarado, que evita análisis de casos y se extiende sin dificultad a cualquier polítopo convexo de dimensiones mayores.

La siguiente es una lista, muy interesante, de lecturas adicionales:

- [1] Chen, “On the Euler Characteristic of Finite Unions of Convex Sets”, *Disc. Comput. Geom.* **10**, 1993, pp. 79–93.

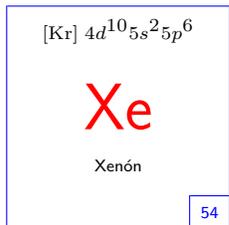
La característica de Euler desempeña un papel importante en muchos temas de matemática discreta y continua. Para espacios no-compactos, su definición homológica, siendo un invariante de homotopía, no parece tan importante como su papel para los espacios compactos. Sin embargo, su definición combinatoria, como una medida finitamente aditiva, demuestra ser más aplicable en el estudio de espacios singulares tales como conjuntos finitamente semialgebraicos, conjuntos subanalíticos, etc. El autor introduce una integral interesante por medio de la cual la característica de Euler combinatorial puede definirse sin la necesidad de descomposición y extensión como en el tratamiento tradicional para los poliedros y las uniones finitas de conjuntos compactos convexos. Subsecuentemente, las uniones finitas de conjuntos convexos cerrados no pueden ser obtenidas cortando conjuntos convexos como en el caso del poliedro, un tratamiento separado de la característica de Euler para funciones generadas por funciones indicador de conjuntos convexos cerrados y conjuntos convexos relativamente abiertos es necesario, y esto forma el contenido de este artículo.

- [2] Levitt, “The Euler Characteristic is the Unique Locally Determined Numerical Homotopy Invariant of Finite Complexes”, *Disc. Comput. Geom.* **7**, 1992, pp. 59–67.

El autor muestra que si un invariante homotópico numérico de simpliciales complejos finitos tiene una fórmula local, entonces, a la multiplicación por una constante obvia, el invariante es la característica de Euler. Es más, la propia característica de Euler tiene una única fórmula local.

- [3] Rocek y Williams, “On the Euler Characteristic of Piecewise Linear Manifolds”, *Phys. Lett. B* **273**, 1991, pp. 95–99.

Las relaciones de Dehn-Sommerville y las ecuaciones correspondientes para las sumas de ángulos son usadas para derivar dos expresiones para la Característica de Euler de una variedad simplicial, primeramente en términos de los números de sub-simpliciales infinito dimensional, y segundo en términos del ángulo de deficiencia infinito-dimensionales. En cada caso se relacionan los coeficientes involucrados con los números de Bernoulli.



peso atómico: 131.29
 punto de fusión: -111.8 °C
 punto de ebullición: -108.09 °C

- [4] Peter Hilton y Jean Pedersen, “Euler’s Theorem for Polyhedra: A Topologist and Geometer Respond”, comentario a: Grunbaum, B., y G. C. Shephard, “A New Look at Euler’s Theorem for Polyhedra”, *Amer. Math. Monthly* **101** 2 (1994), pp. 109–128 [MR 95c:52032]. Con una respuesta por Grunbaum y Shephard: *Amer. Math. Monthly* **101** 10 (1994), pp. 959–962.
- [5] Krzysztof Przeslawski, “Linear Algebra of Convex Sets and the Euler Characteristic”, *Linear and Multilinear Algebra* **31** 1–4 (1992), pp. 153–191.
- [6] G. Thomas Sallee, “Euler’s Relation and Where It Led”, *Convexidad y Geometría Combinatorial Relacionada*, Norman, Okla., 1980, pp. 45–55. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **76**, Dekker, Nueva York, 1982.
- [7] R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.
- [8] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications, Nueva York, 1973.
- [9] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1961.
- [10] M. Henle, *A Combinatorial Introduction to Topology*, Dover Publications, Nueva York, 1994.
- [11] D. Hilbert y S.Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1990.
- [12] D. Wells, *You are a Mathematician*, John Wiley & Sons, 1995.

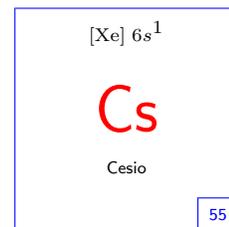
ANEXO

EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

El teorema de la curva de Jordan es decepcionantemente simple:

Teorema de la curva de Jordan. *Cualquier curva cerrada simple continua en el plano, separa el plano en dos regiones disjuntas, el interior y el exterior.*

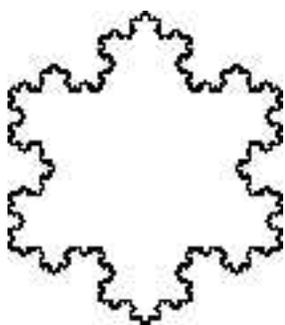
Durante mucho tiempo este resultado fue considerado tan obvio que nadie se molestó en demostrar el teorema. El resultado se declaró primero como un teorema en el famoso libro de texto de Camille Jordan (1838–1922), *Cours d’Analyse de l’École Polytechnique* en 1887, y por tanto lleva su nombre. Jordan encontró que demostrar este teorema no es de ninguna manera fácil,



peso atómico: 132.90543
 punto de fusión: 28.4 °C
 punto de ebullición: 674.8 °C

y de hecho la prueba que él brindó en su libro de texto está completamente equivocada.

El teorema es de hecho obvio para las curvas suaves¹⁸ y no demasiado difícil para las curvas lisas a tramos. Sin embargo, este acercamiento no es válido para curvas cerradas simples no suaves en ninguna parte como el copo de nieve de van Koch mostrado aquí.

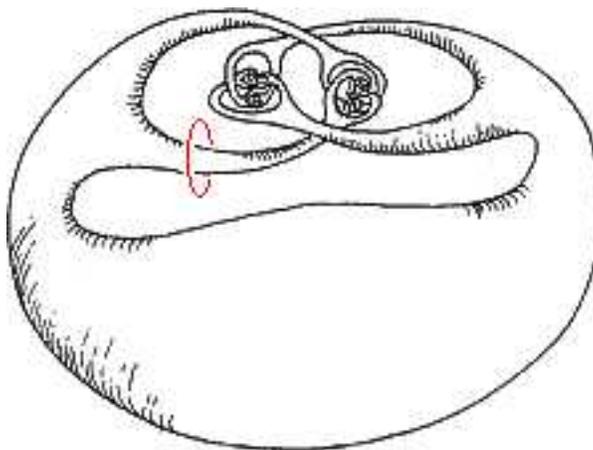


La primera prueba correcta del teorema de la curva de Jordan fue dada por Oswald Veblen en 1905. Sin embargo, su prueba dejó abierta la pregunta de cuando el interior y exterior de tales curvas son homeomórficas al interior y exterior del círculo normal en el plano (*i.e.*, la unidad de los números complejos). Esta versión fuerte del teorema de la curva de Jordan fue probada por A. Schönflies en 1906. (Su prueba tuvo algunos errores que fueron señalados por L. E. J. Brouwer en 1909.)

Teorema de la curva de Jordan-Schönflies. Para cualquier curva cerrada simple en el plano, hay un homeomorfismo del plano que transforma la curva en el círculo normal.

Brouwer consideró entonces análogos en dimensiones más altas de esta pregunta. En 1912 él mostró:

Teorema de la separación de Jordan-Brouwer. *Cualquier inmersión de la esfera $(n-1)$ -dimensional en un espacio euclidiano n -dimensional separa el espacio euclidiano en dos regiones disjuntas.*



Brouwer fue incapaz de demostrar el análogo del teorema de Jordan-Schönflies que el interior y fuera de semejante esfera fuera homeomórfico al interior y exterior de la esfera normal en el espacio euclidiano (*i.e.*, la esfera de vectores unitarios). En 1921, J. W. Alexander anunció que él tenía una prueba de este resultado. Sin embargo, antes de que publicara su artículo, descubrió un error en su prueba. Entonces, en 1924 des-

[Xe] 6s²

Ba

Bario

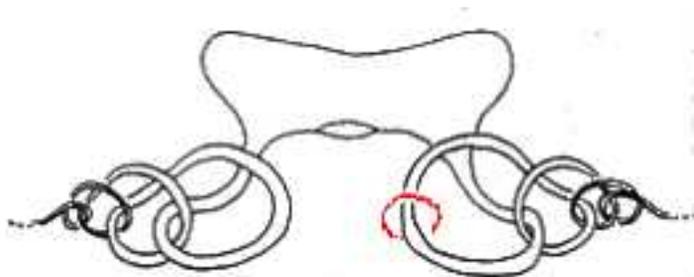
56

peso atómico: 137.327
punto de fusión: 726.9 °C
punto de ebullición: 1845 °C

¹⁸Los textos de cálculos elementales normales muestran cómo calcular el vector normal exterior a semejante curva.

cubrió un contraejemplo al análogo del teorema de Jordan-Schönflies en 3-dimensiones, el que llegó a ser conocido como *La esfera astada de Alexander*: el exterior de la esfera astada simplemente no se conecta, es diferente el exterior de la esfera normal: una vuelta alrededor de uno de los cuernos de la esfera astada no puede deformarse continuamente a un punto sin atravesar la esfera astada.

En 1948 R. H. Fox y E. Artin dieron los ejemplos más simples de inmersión de esferas no-estándar en el espacio euclidiano de 3-dimensiones:



así como los arcos:



[Xe] 5d ¹ 6s ²
La
Lantano
57

peso atómico: 138.9055
 punto de fusión: 920 °C
 punto de ebullición: 3420 °C