Respuesta a los problemas presentados en el número 17

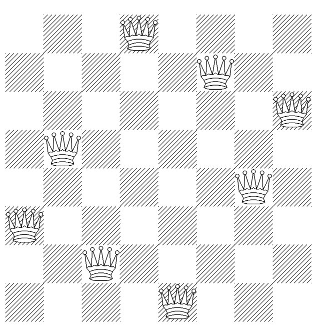
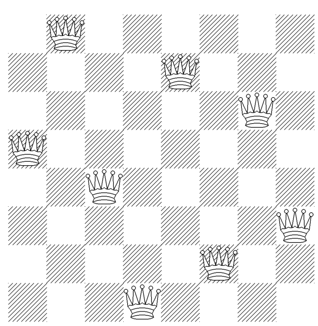
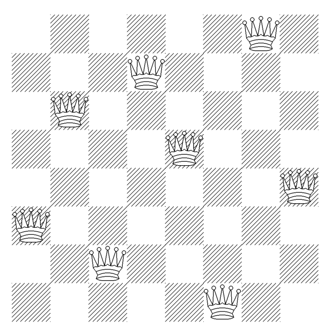
Problema 1. El primero en plantear el problema de las ocho damas fue el experto alemán Max Bezzel que, con el seudónimo *Schachfreund*, lo publicó en 1848 en la revista especializada *Berliner Schachzeitung*, y consiste en colocar ocho damas sobre el tablero de forma que ninguna de ellas amenace a ninguna otra. Puesto que la dama se desplaza horizontal, vertical y diagonalmente, el problema equivale a situar ocho piezas en el tablero de forma que no haya dos en la misma fila, columna o diagonal.

El problema fue analizado, entre otros, por el mismísimo Gauss, el príncipe de los matemáticos, que halló 76 de las 92 soluciones posibles; pero el primero en encontralas todas, en 1850, fue un amigo suyo, el matemático ciego Franz Nauck.

En realidad, sólo hay 12 soluciones básicas, y las 80 restantes se obtienen por giros y simetrías.

Helge Grenager Solheim creó, en 1997, un programa java con el cual se pueden buscar las disitas soluciones (véase `http://www.pvv.ntnu.no/ hgs/`).

A continuación se dan tres soluciones posibles:

Si la última de estas soluciones se codifica de acuerdo a la posición que ocupa la reina en cada renglón con respecto al extremo izquierdo, ésta se escribe como 7 4 2 5 8 1 3 6, y las siguientes siete soluciónes se obtienen por rotaciones y simetrías [datos obtenido del empleo del programa de Helge Grenager Solheim antes mencionado]:

25741863
36275184
36814752
48157263
51842736
63185247
63724815

Aunque se ha encontrado el número de soluciones posibles para los tableros de órdenes 4 a 15, no se conoce un algoritmo que exprese dicho número en función del orden del tablero.

Tamañ o del tablero	*Número de soluciones*
4×4	2
5×5	10
6×6	4
7×7	40
8×8	92
9×9	352
10×10	724
11×11	2,680
12×12	14,200
13×13	73,712
14×14	365,596
15×15	2,279,184

Problema 2. Observemos que una torre domina las casillas horizontales y verticales a la casilla que ocupa. De esta manera, al colocar una torre en una esquina reducimos el problema al de un tablero de 7×7; lo mismo ocurre si colocamos esa primera torre en cualquiera de las ocho casillas, digamos, en la dirección vertical, es decir, tenemos 8 posibles arreglos o combinaciones para esta torre. Continuando, el problema del tablero de 7×7 se reduce al de un tablero de 6×6, dejando 7 posibles arreglos o combinaciones para la segunda torre, lo que hace que entre las combinaciones de las primera y segunda torres tengamos 8×7 posibilidades. Reduciendo cada vez el tablero hasta llegar al de 1×1, obtenemos la solución al problema de las torres como el producto

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40,320.$$

De manera totalmente análoga se demuestra que en un tablero de $n \times n$ existen $n!$ posibles soluciones para colocar n torres de modo que no puedan atacarse entre sí.

Generalizando este problema y tomando un tablero de $m-n$, es decir, un tablero formado por m casillas horizontales y n casillas verticales, queremos saber de cuántas maneras se pueden colocar en este tablero k torres de forma que no se ataquen entre sí.

Primeramente se escogen las horizontales, sobre las cuales se hallarán las torres. Como el número total de horizontales es igual a m y hay que escoger k de ellas, la elección puede efectuarse de

$$\frac{m!}{k!(m-k)!}\,.$$

Análogamente las verticales sobre las que estarán las torres se pueden escoger de

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Como la elección de las verticales no depende de la de las horizontales, se obtienen, en virtud de la regla del producto,

$$\frac{m!n!}{k!(m-k)!k!(n-k)!}$$

modos de elección de las líneas en que se hallarán las torres.

Sin embargo, aquí no termina aún el problema. Es que k horizontales y k verticales se intersectan en k^2 casillas. Desplazando, de ser necesario, estas casillas, obtenemos un nuevo tablero de k horizontales y k verticales. Y ya sabemos que en tal tablero k torres se pueden disponer de $k!$ formas (de modo que no puedan comer una a la otra). Por esto, el número total de disposiciones requeridas es igual a

$$\frac{k!m!n!}{k!(m-k)!k!(n-k)!}\,,$$

es decir,

$$\frac{m!n!}{k!(m-k)!(n-k)!}\,,$$

Para $k = m = n$, el resultado da $n!$, como ya se había señalado.