La adición de $(n-1)$ tratamientos a un *cuadrado latino* de $n \times n$: combinatoria

G. H. Freeman*
y
J. A. Góngora-Aldaz**,[1]

RECIBIDO: *julio de 2001*
ACEPTADO: *noviembre de 2001*

RESUMEN

Un cuadrado latino es escrito con frecuencia como un arreglo de letras latinas de modo tal que cada letra aparece exactamente una vez en cada renglón y cada columna. Bajo la relación de equivalencia apropiada y para $n = 4$ y 5, los cuadrados latinos de tamaño $n \times n$ se dividen en dos clases. Para cada uno de estos dos tamaños sus respectivas dos clases difieren con respecto a la posibilidad de agregar ortogonalmente n tratamientos. No sólo se devela el número de maneras de agregar $(n-1)$ tratamientos nuevos para cada representante de clase de los cuadrados de tamaño $n \times n$, $n = 4$ y 5; sino que además los arreglos resultantes son *categorizados* y *encriptados*. Algunos de los representantes de clase, pero no todos, son *cambiables* en el sentido definido por Freeman [1966]. Los representantes de clase que son cambiables son examinados en más detalle y se halla que cambiando un representante conduce algunas veces a un elemento en su misma clase pero con más frecuencia a un elemento en una clase diferente. El potencial de las herramientas de matemáticas discretas sobre objetos combinatorios que resultan de agregar $(n+1)$ tratamientos a cuadrados latinos de tamaño $n \times n$ todavía no parece haberse explorado.

*The University of Warwick, Department of Statistics. Coventry CV4 7AL, England, U.K. Correo electrónico: geoffreeman@cix.co.uk

**Universidad Autónoma de Yucatán, Unidad Académica de Cozumel. Predio Núm. 258 de la Calle 41 entre 6 y 4, Mayapán, 97159 Mérida, Yucatán. México. Correo electrónico: calesusrap@hotmail.com

[1]Ahora en la Universidad de Quintana Roo, Unidad Académica de Cozumel, Departamento de Humanidades y Tecnología, Av. Andrés Quintana Roo con Calle 110 Sur s/n (frente a la Colonia San Gervasio), Cozumel, 77600 Quintana Roo, México.

1. Introducción

Frecuentemente un cuadrado latino se escribe como un arreglo de letras latinas —motivo de su nomenclatura— de modo tal que cada letra aparece exactamente una vez en cada renglón y cada columna. Por convenio las letras son A, B, C, ...

Un ejemplo de tales arreglos es el siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ B & C & D & E & F & A \\ C & D & E & F & A & B \\ D & E & F & A & B & C \\ E & F & A & B & C & D \\ F & A & B & C & D & E \end{array}$$

El ejemplo arriba citado hace evidente que un cuadrado latino es un arreglo combinatorio de *tres clasificaciones*: renglones, columnas y letras.

Cuando es posible dividir las n^2 celdas de un cuadrado latino en r grupos $S_1, S_2, \ldots, S_r$, donde S_p tiene n_{kp} miembros y $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, tal que S_p tiene k_p celdas en cada renglón, columna y letra, entonces se dice que la subdivisión constituye una *partición ortogonal* $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ del cuadrado [Finney, 1945]. Sin embargo, cuando las n^2 celdas se dividen en grupos $S_1, S_2, \ldots, S_r$, donde S_p tiene m_p miembros y, en general, m_p no es un entero múltiplo de n, la *partición* que resulta es *no-ortogonal*.

Por ejemplo, considere lo siguiente: un arreglo de 16 celdas y el cuadrado latino de 4×4 asociado a éste son ilustrados en:

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_5 & w_6 & w_7 & w_8 \\ w_9 & w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{array}$$

Una partición ortogonal $(1,1,1,1)$, o 1^4 para abreviar, para este cuadrado latino es dada por $S_1 = \{w_1, w_7, w_{12}, w_{14}\}$, $S_2 = \{w_2, w_8, w_{11}, w_{13}\}$, $S_3 = \{w_3, w_5, w_{10}, w_{16}\}$, $S_4 = \{w_4, w_6, w_9, w_{15}\}$. En términos de las letras latinas la partición ortogonal 1^4 es representada por $S_1 = \{A, D, B, C\}$, $S_2 = \{B, C, A, D\}$, $S_3 = \{C, B, D, A\}$, $S_4 = \{D, A, C, B\}$. Por otra parte, una partición no-ortogonal en tres subconjuntos para el mismo cuadrado latino es dada por $S'_1 = \{w_1 w_2, w_7 w_8, w_{11} w_{12}, w_{13} w_{14}\}$, $S'_2 = \{w_3, w_5, w_{10}, w_{16}\}$,

$S_3' = \{w_4, w_6, w_9, w_{15}\}$. En términos de las letras latinas la partición no-ortogonal en tres subconjuntos es representada por $S_1' = \{AB, DC, AB, DC\}$, $S_2' = \{C, B, D, A\}$, $S_3' = \{D, A, C, B\}$.

De entre las particiones ortogonales algunos, pero no todos, de los cuadrados latinos poseen directrices, una *directriz* o *transversal* de un cuadrado latino de tamaño $n \times n$ es un conjunto de n celdas, una de cada renglón, columna y letra del cuadrado.

Considere, por ejemplo, el cuadrado latino siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ B & C & E & A & D \\ C & E & D & B & A \\ D & A & B & E & C \\ E & D & A & C & B \end{array}$$

La diagonal de izquierda a derecha define una transversal. Una *directriz* para este cuadrado es dada por la colección $T_1 = \{w_1 w_7, w_{13} w_{19}, w_{25}\}$. En términos de las letras latinas la transversal es representada por $T_1 = \{A, C, D, E, B\}$.

Para $n = 4$ y 5, respectivamente, una relación de equivalencia apropiada induce una partición en el conjunto de cuadrados latinos de tamaño $n \times n$ en dos clases. Ocurre que para $n = 4$ y 5, un cuadrado de tamaño n de la segunda clase contiene n directrices paralelas mientras que uno de la primera no.

La primera clase de cuadrados latinos de tamaño 4×4 no posee directrices pero la primera clase de cuadrados de 5×5 posee 3, todas ellas pasan a través de una celda del representante de clase.

Para diversos propósitos, incluyendo el que se discute aquí, la diferencia principal para cada tamaño de cuadrado entre sus respectivas dos clases consiste en poder agregar ortogonalmente otro conjunto de tratamientos a un cuadrado de la segunda clase pero no de la primera.

El término *tratamiento* que se ha estado usando hasta ahora tiene su origen del uso que de los objetos combinatorios de cuatro clasificaciones discutidos aquí se ha hecho en el área de modelación estadística, un tópico que se discute en escritos como, por ejemplo, el de Góngora-Aldaz [1997]. En lo que resta del artículo se usará el término *tratamiento* o *símbolo* para hacer referencia a los elementos en la cuarta clasificación de los objetos combinatorios, en cuatro clasificaciones, tratados aquí. Esto es, aquellos objetos que resultan de agregar $(n-1)$ símbolos a un cuadrado latino de $n \times n$.

Para $n = 4$ y 5, la existencia de particiones de cuadrados latinos de tamaño $n \times n$ en $n-1$ conjuntos es conocida desde hace varios años. Freeman [1966], abreviado a partir de ahora como F66, no sólo demostró que siempre es posible agregar tres tratamientos a un cuadrado latino de 4×4 o cuatro tratamientos a un cuadrado latino de 5×5 sino que además presentó ejemplos obtenidos por medio de su metodología. El tema fue señalado como una apertura de investigación a los estudios de Góngora-Aldaz [1997].

Para cuadrados de 4×4 F66 cambió la notación para los conjuntos de S_1, S_2, S_3 a S_0, S_1, S_2, donde S_0 posee seis elementos mientras que S_1 y S_2 poseen cinco elementos cada uno: de manera análoga la notación para cuadrados de 5×5 fue cambiada a $S_0, \ldots, S_3$.

F66 definió que dos particiones serían consideradas como *iguales* si para algún valor no nulo de p, una partición puede obtenerse de la otra intercambiando todos los elementos de S_p con todos los elementos excepto uno de S_0. Las particiones que satisfacen ésta propiedad fueron denominadas *cambiables* y aquellas que no la satisfacen *no-cambiables*.

Una consecuencia útil es que en las particiones no-cambiables es imposible tener una directriz con n ceros debido a que los dos ceros adicionales ocurrirían en posiciones tales que harían la partición cambiable.

Se define como celda *pivotal* o *pivote* a una que contiene al cero de modo que las otras celdas en el mismo renglón, la misma columna y la misma letra son $0, \ldots, n-2$ en algún orden.

A pesar de que no hubo un reconocimiento explícito en F66, algunas veces hay más de un pivote para una solución cambiable dada. Ningún pivote puede ocurrir en una directriz, debido a que el número de ceros tendría que ser uno para el pivote, tres para otras celdas que tengan el mismo renglón, columna y letra, y $n-1$ para aquellas en el resto de la directriz, un total de $n+3$; sin embargo, sólo hay $n+2$ ocurrencias de ceros en total.

El número de soluciones al problema de agregar $n-1$ tratamientos a un cuadrado de $n \times n$ no se había develado ni para valores pequeños de n. Se ha realizado una enumeración exhaustiva por ordenador con objeto de hallar el número completo de soluciones para valores de $n = 4$ y 5.

Lo que es más, se han categorizado las soluciones, vía un incremento en las operaciones de equivalencia que actúan sobre el conjunto de los objetos de cuatro clasificaciones, que resultaron de la enumeración, en clases de diversos tamaños.

Finalmente, la acción de la propiedad de *cambiabilidad* sobre los representantes de clase permite *encriptar* la información al máximo.

Cuando es posible obtener una solución a partir de otra por medio de cualesquier de los diversos tipos de intercambio por describir, entonces las dos soluciones son equivalentes y categorizadas en la misma clase.

Aquí, como en otros escritos, los presentes autores hacen referencia a arreglos de este tipo como *objetos combinatorios en cuatro clasificaciones* y cuando se utilizan como diseños en modelación estadística como *diseños para adicionar* $(n-1)$ *tratamientos a cuadrados latinos de tamaño* $n \times n$.

La distinción entre el objeto combinatorio y el diseño de renglón columna denominados cuadrados latinos es fundamentada por Góngora-Aldaz [1997]. Este concepto, de diferenciación, también se aplica a otros arreglos de renglón-columna como por ejemplo los cuadrados de Youden discutidos por Góngora-Aldaz & Freeman [2000, §3.1].

El propósito primario del presente artículo es *relacionar* los números obtenidos en la enumeración de los objetos con las soluciones identificadas por F66. La enumeración completa del tipo de objetos combinatorios en cuatro clasificaciones definidos aquí fue dada por Freeman y Góngora-Aldaz [1999] para $n = 4$ y Freeman y Góngora-Aldaz [2000] para $n = 5$. Estos dos reportes contienen mayor información; las distintas soluciones, que son muy numerosas, pueden ser obtenidas del primer autor.

El propósito secundario es *relacionar* las nociones de *cambiabilidad* y las *clases de equivalencia* de los objetos. Esto con la finalidad de *encriptar* la información al máximo. Como una consecuencia se reduce el número de representantes de clase. Además, en este escrito se describe lineamientos para la recuperación de la información encriptada.

Para los objetos de cuatro clasificaciones de este tipo, que son construidos sobre cuadrados latinos de tamaño 4×4 de la clase I, los tres representantes son cambiables. En contraste, sólo una de las dos clases de equivalencia construidas sobre cuadrados latinos de la clase II es cambiable.

Para los objetos construidos sobre cuadrados latinos de tamaño 5×5 de la clase II, 15 de las 23 clases de equivalencia son cambiables y 245 de 292 representantes de clase construidos sobre cuadrados de la clase I son cambiables. Las soluciones cambiables fueron consideradas en más detalle por Freeman y Góngora-Aldaz [2001]; para mayor información recomendamos al lector el reporte recién citado, en especial para los cuadrados de 5×5 de la clase I.

2. Cuadrados latinos de tamaño 4×4

Implícito en trabajos de otros autores por más de 200 años se encuentra el resultado de que hay dos *clases de equivalencia* de cuadrados latinos de tamaño 4×4. Representantes de tales clases son, usando letras latinas como símbolos:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & B & A \\ D & C & A & B \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{array}$$

Se puede ver que los dos cuadrados arriba citados son iguales excepto por los símbolos A y B en los renglones número 3 y 4, pero esto es suficiente para que los cuadrados tengan propiedades diferentes.

El segundo cuadrado, pero no el primero, posee cuatro directrices paralelas; ciertamente el primer cuadrado no posee directrices. Siguiendo una notación conocida, haremos referencia a los cuadrados arriba citados como representantes de las clases I y II de cuadrados latinos de tamaño 4×4, respectivamente.

Procedemos ahora a una discusión sobre las dos clases de equivalencia de cuadrados latinos de manera individual.

2.1. Cuadrados latinos de la clase I

F66 mostró que todas las soluciones para la clase I provienen de particiones cambiables y dio los primeros dos de los ejemplos citados abajo, en los cuales se intercambia todas las celdas con 0 y 1 a excepción de A_0 en el primer renglón y columna. Sin embargo, F66 no dio el tercer ejemplar, para el cual en el primer objeto intercambia todas las celdas con 0 y 2 a excepción de A_0 en el primer renglón y columna.

Hay 384 objetos encriptados en el primer y tercer ejemplares pero sólo 192 elementos encriptados en el segundo

$$\begin{array}{cccc} A_0 & B_0 & C_1 & D_2 \\ B_1 & A_2 & D_0 & C_0 \\ C_0 & D_1 & B_2 & A_1 \\ D_2 & C_2 & A_0 & B_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_0 & B_1 & C_0 & D_2 \\ B_0 & A_2 & D_1 & C_1 \\ C_1 & D_0 & B_2 & A_0 \\ D_2 & C_2 & A_1 & B_0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} A_0 & B_2 & C_1 & D_0 \\ B_1 & A_0 & D_2 & C_2 \\ C_2 & D_1 & B_0 & A_1 \\ D_0 & C_0 & A_2 & B_1 \end{array}$$

El número de elementos encriptados no es obvio. La celda que contiene al símbolo A en el primer renglón en cada representante es un pivote, y no hay otro en el primer ejemplar; para cada uno de los representantes segundo y tercero existe una celda pivotal adicional, la que contiene a A en el tercer renglón del segundo ejemplar, y la que contiene a D en el cuarto renglón del tercero.

La mejor manera de encriptar y recuperar las soluciones para este conjunto parece ser por medio de las ocurrencias de los símbolos $0, 1, 2$ en el mismo renglón, la misma columna y la misma letra que el pivote. Supongamos que el pivote es, como en los representantes dados arriba, la celda en el primer renglón y columna: entonces, ordenando las ocurrencias por columnas dentro del primer renglón, después por renglones dentro de la primera columna y finalmente por renglones sobre la primera letra, le estructura para el primer representante sería: 0 1 2, 1 0 2, 2 1 0.

Las estructuras que conducen a los diversos elementos en la clase son como se muestra en el Tabla 1, el número de posibilidades se reduce al eliminar transposiciones.

TABLA 1. Estructuras posibles para la clase I

Primer renglón	*Primera columna*	*Primera letra*	*Soluciones*
012	102	201	3, 3
012	102	210	1, 2
012	120	201	1, 2
012	120	210	3, 3
012	201	102	3, 3
012	201	120	1, 2
012	210	102	1, 2
012	210	120	3, 3
102	201	012	3, 3*
102	201	021	3, 3*
102	210	012	1, 2
102	210	021	1, 2
120	210	012	3, 3*
120	210	021	3, 3*

Así, el primero de los tres ejemplares de arriba tiene seis estructuras, y para el conjunto de cuadrados de esta clase cualquiera de las dieciséis celdas puede ser el pivote, renglones y columnas pueden quedar como están o ser transpuestos, y finalmente los símbolos 1 y 2 pueden quedar como están o ser intercambiados. Entonces hay $6 \times 16 \times 2 \times 2 = 384$ elementos encriptados para este representante.

El segundo ejemplar tiene el mismo número de estructuras que el primero pero contiene dos pivotes, por lo que el número posible de elementos encriptados en este representante es la mitad, esto es 192.

La situación con el tercer ejemplar es un poco más compleja: a primera vista parece que hay 16 estructuras de modo que, con dos pivotes, el número de elementos encriptados debería ser de

$$\frac{16 \times 16 \times 2 \times 2}{2} = 512.$$

Sin embargo, en las soluciones marcadas con un asterisco en la Tabla 1 arriba, pero no en las otras, la composición de las operaciones de transposición de renglones y columnas y el intercambio de los símbolos 1 y 2 dejan la estructura sin cambio. Así hay de hecho doce estructuras distintas, por lo que el número de elementos encriptados en esta clase es $\frac{3}{4} \times 512 = 384$.

En el ejemplar dado como representante de la clase #1 el intercambio de 0 y 1 en toda celda a excepción de la esquina superior izquierda conduce al ejemplar dado como representante de la clase #2, mientras que el intercambio del 0 y 2 conduce al ejemplar dado como representante de la clase #3. De manera análoga, intercambiar 0 y 1 en el ejemplar dado como representante de la clase #3 conduce a un elemento en la clase #2, mientras que intercambiar 0 y 2 regresa al representante a la clase #1.

Para el representante de la clase #2, el uso del primer pivote y el intercambio de todos los ceros y unos excepto el pivote nos regresa al ejemplar que representa la clase #1, mientras que usar el mismo pivote e intercambiar 0 y 2 conduce a un elemento en la clase #3.

La conclusión es que el intercambio del 0 con cualesquier de 1 o 2 siempre conduce a un elemento en una clase diferente y nunca a uno en la misma clase.

2.2. Cuadrados latinos de la clase II

F66 mostró la existencia de dos formas de agregar tres tratamientos a un cuadrado de tamaño 4×4 para esta clase. Las dos soluciones que presentó son las siguientes:

$$
\begin{array}{cccc}
A_0 & B_w & C_1 & D_2 \\
B_1 & A_2 & D_0 & C_x \\
C_2 & D_1 & A_y & B_0 \\
D_z & C_0 & B_2 & A_1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
A_0 & B_0 & C_1 & D_2 \\
B_1 & A_2 & D_0 & C_0 \\
C_2 & D_1 & A_1 & B_0 \\
D_0 & C_2 & B_2 & A_1
\end{array}
$$

El primer representante es cambiable: aquí, los símbolos w, x, y, z representan 0, 0, 1, 2 en cualquier orden: cada uno de los símbolos 0, 1, 2 ocurre en una directriz, como ocurre con w, x, y, z. Hay dos conjuntos de directrices paralelas y así la directriz con w, x, y, z puede seleccionarse de ocho maneras distintas. Más aún, es posible asociar w, x, y, z con 0, 0, 1, 2 de doce maneras. Lo que es más, es posible permutar las ocurrencias restantes de 0, 1, 2, que también están en directrices, de seis maneras. Así, hay $8 \times 12 \times 6 = 576$ elementos encriptados, los cuales son todos distintos.

También es posible obtenerlos como todas las combinaciones posibles de los automorfismos de renglones, columnas y letras que dan el mismo arreglo que el objeto original, multiplicado por las 2×2 posibilidades de transponer renglones y columnas o no y, de intercambiar los símbolos 1 y 2 o no.

Hay dos celdas pivote, determinadas por dos de las letras w, x, y, z que son 0. El usar cualquiera de los pivotes conduce a un elemento en esta misma clase. Esto se debe a que sólo hay un representante de clase que es cambiable al intercambiar 0 con 1 o 2.

La segunda solución es no-cambiable: aquí, dos directrices paralelas contienen cuatro 1's y cuatro 2's; de las otras directrices paralelas a estas, una tiene tres 0's y un 1 y la otra tres 0's y un 2. Es posible seleccionar las directrices con 1, 2 en doce maneras de cualesquier de los dos conjuntos de directrices paralelas. En las dos directrices paralelas restantes los símbolos, digamos 0, 0, 0, 1 pueden ser permutados de cuatro maneras; sin embargo, esto restringe la asignación de los símbolos 0, 0, 0, 2 a sólo dos de las cuatro posibilidades. Hay entonces $2 \times 12 \times 4 \times 2 = 192$ soluciones encriptadas, las cuales son todas distintas.

Es posible verificar que los automorfismos de renglones, columnas y letras dan soluciones repetidas.

3. Cuadrados latinos de tamaño 5×5

El número de maneras de agregar cuatro tratamientos a cuadrados latinos de tamaño 5×5 es mayor que el número de maneras de agregar tres tratamientos a cuadrados latinos de tamaño 4×4.

Con fines ilustrativos, se considerarán sólo aquellas soluciones en las cuales el primer renglón contiene dos 0's y los números 1, 2, 3 en orden ascendente en las columnas: hay 7,906 objetos de cuatro clasificaciones para cuadrados de la clase I y 5,520 para cuadrados de la clase II.

F66 identificó cuatro *tipos* de solución para los cuadrados de la clase I y cinco *tipos* para los de la clase II, por lo que listaremos nuestros resultados por referencia a estos tipos.

Los representantes de clase utilizados en F66 son diferentes de aquellos usados aquí; así, en F66 el cuadrado #1 de Fisher y Yates [1938] fue usado como representante de la clase de equivalencia I, mientras que aquí usaremos el cuadrado #7; para representar la clase II se usó el cuadrado #51 en F66, mientras que aquí usaremos el cuadrado más común, el #52.

Los cuadrados y las operaciones requeridas para obtener uno a partir del otro se muestran a continuación:

Clase I Cuadrado 1	A	B	C	D	E	Cuadrado 7	A	B	C	D	E
	B	A	E	C	D		B	A	D	E	C
	C	D	A	E	B		C	D	E	A	B
	D	E	B	A	C		D	E	B	C	A
	E	C	D	B	A		E	C	A	B	D

Para obtener el cuadrado 7 a partir del 1, intercambiar el primer y segundo renglón y letras y permutar cíclicamente las columnas 3, 4, 5.

Clase II Cuadrado 51	A	B	C	D	E	Cuadrado 52	A	B	C	D	E
	B	C	E	A	D		B	C	D	E	A
	C	E	D	B	A		C	D	E	A	B
	D	A	B	E	C		D	E	A	B	C
	E	D	A	C	B		E	A	B	C	D

Para obtener el cuadrado 52 a partir del 51 intercambiar el cuarto y quinto renglones, columnas y letras.

Se procederá ahora a una discusión sobre las dos clases de equivalencia de cuadrados latinos de manera individual. Como la clase II es la más simple en muchos aspectos será considerada primero.

3.1. Cuadrados latinos de la clase II

El cuadrado latino de tamaño 5×5 usado como representante de clase aquí, el #52 arriba, es un cuadrado cíclico, cuyas propiedades están a la vista. Representa a 1,200 cuadrados latinos para propósitos de modelación estadística [Góngora-Aldaz, 1997].

Al considerar la adición de cuatro tratamientos sobre este representante de clase resultan 240 clases, que son las que se discuten aquí.

Considérese por un instante el grupo de simetrías de un cuadrado sobre el cuadrado latino #52 arriba citado. Las operaciones de este grupo son: rotaciones a 90°, 180°, 270° y 360°, reflexiones respecto a la horizontal y vertical, y transposiciones respecto a las dos diagonales, consideradas de arriba hacia abajo, que van de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, respectivamente.

Al aplicar cada una de estas operaciones sobre el cuadrado #52 se obtiene el siguiente conjunto de cuatro elementos:

Rotación 90° *(reflexión horizontal)*					Rotación 180° *(reflexión Der.-Izq.)*					Rotación 270° *(reflexión vertical)*					Rotación 360° *(reflexión Izq.-Der.)*				
E	A	B	C	D	D	C	B	A	E	E	D	C	B	A	A	B	C	D	E
D	E	A	B	C	C	B	A	E	D	A	E	D	C	B	B	C	D	E	A
C	D	E	A	B	B	A	E	D	C	B	A	E	D	C	C	D	E	A	B
B	C	D	E	A	A	E	D	C	B	C	B	A	E	D	D	E	A	B	C
A	B	C	D	E	E	D	C	B	A	D	C	B	A	E	E	A	B	C	D

Ciertamente, todos *son el mismo*. Es decir, todos *son equivalentes* bajo la acción del grupo de simetrías del cuadrado.

Klima [2000, pág. 5] expresa las simetrías de un cuadrado como permutaciones de sus vértices y proporciona algunos ejemplos. Sin embargo, nadie parece haber estudiado la acción del grupo de simetrías de un cuadrado sobre el conjunto de cuadrados latinos. Por lo que aquí se señala una posible apertura de investigación.

Vamos a regresar al tópico bajo discusión aquí, que es la enumeración, clasificación y encriptación de objetos de cuatro clasificaciones que se construyen al agregar $n-1$ símbolos a cuadrados latinos de tamaño $n \times n$. Lo que se va a hacer en los próximos párrafos es describir la metodología para clasificar y encriptar *objetos combinatorios* de este tipo para valores pequeños de n.

Uno de los efectos de la metodología discutida aquí sobre el cuadrado latino #52 arriba citado, *pero ciertamente no para toda técnica de clasificación*, consiste en que la transposición de renglones y columnas respecto a la diagonal, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, no lo altera puesto que es simétrico, por lo que se cubren dos posibilidades, y es *combinatoriamente* el mismo si se permutan cíclicamente columnas y letras en todas las maneras posibles, que son cinco incluyendo el original.

Más aún, cuando se agrega cuatro tratamientos, hay dos renglones que contienen dos 0's y cualesquiera de éstos podría tomarse como el primer renglón ya que el arreglo es equivalente si renglones y letras son permutados cíclicamente. Además se obtiene un arreglo equivalente si se intercambian letras con renglones o columnas, pero el intercambio de columnas y letras no conduce a otra solución. Se obtienen otras posibilidades tomando renglones, columnas y letras en cualquier orden: [13524], [14253] o [15432]. Así tenemos: transponer o no (2) $\times$ permutaciones cíclicas de columnas y letras (5) $\times$ dos primeros renglones posibles (2) $\times$ letras sin intercambiar o intercambiadas con renglones o columnas (3) $\times$ renglones, columnas y letras en orden [12345], [13524], [14253] o [15432] (4), esto es $2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 = 240$.

Por medio de tales operaciones el conjunto total de 5,520 objetos, que resultan de la adición de cuatro tratamientos a cuadrados latinos de tamaño 5×5 para su aplicación en modelación estadística, se almacenan en $\frac{5\,520}{240} =$ 23 clases.

No parece haber manera obvia de listar estos 23 representantes de clase, de modo que se hará de manera análoga a F66. Esto es, de acuerdo al número de directrices y luego por la propiedad de *cambiabilidad*, con las no-cambiables primero y luego, para los representantes de clase cambiables, de acuerdo al número de pivotes.

Tampoco existe razón particular para elegir un elemento sobre otro como representante de clase. Por lo que se elegirá representante de clase de modo que exista cierta homogeneidad entre aquellos con propiedades similares. Todos los representantes de clase mostrados en la Tabla 2 tienen 0 0 1 2 3 como primer renglón.

Los primeros cinco representantes de clase son no-cambiables: siendo las primeras dos de tipo $6e$ en F66 y las otras tres de tipo $6g$. Los representantes de las clases 1 y 2 en la Tabla 2 tienen el símbolo 1 en la directriz del cuadrado latino C A D B E en orden para los reglones. Los representantes 3–5 tienen dos símbolos sobre las directrices del cuadrado latino; todos los representantes de estas clases en la Tabla 2 tienen el número 1 sobre la directriz C B A E D y el número 2 sobre la directriz D C B A E en orden para los renglones.

Posteriormente se tiene un conjunto de representantes que son cambiables. Las clases 6–11 tienen dos números sobre las directrices del cuadrado latino, ninguno es 0, y son del tipo $6f$ en F66. Todos los representantes de estas clases en la Tabla 2, como aquellos de las clases 3–5, tienen el número 1 sobre la directriz C B A E D en orden para los renglones y el número 2 sobre la directriz D C B A E.

Más aún, el pivote contiene a A en el renglón 1 para los representantes de las clases 6 y 7, a A en el renglón 2 para los representantes de las clases 8 y 9, y a B en el renglón 1 para los representantes de las clases 10 y 11.

La diferencia entre los representantes de clase dentro de cada uno de estos tres pares está en las posiciones de los números 1 y 2 que no están sobre una directriz.

Los representantes de clase 12–14, que también son cambiables, no fueron dadas de manera explícita en F66.

Todos ellos tienen dos números sobre directrices del cuadrado latino, una de las cuales es 0, y dos pivotes, las ocurrencias de 0 que no están sobre una directriz. Todos los representantes en la Tabla 2 tienen 1 sobre una directriz. Se muestra dos representantes para la clase 13, uno de los cuales es diferente del representante de clase 12 en sólo dos números mientras que el otro sólo tiene dos números diferentes del representante de clase 14; ambos de estos conjuntos de números diferentes son 0 y 1. Para el representante de la clase 12 y el primero de la clase 13 el número 0 está sobre la directriz B D A C E en orden para los renglones y para el representante de la clase 14 y el segundo de la clase 13 el símbolo 0 está sobre la directriz A C E D B; para todos los cuatro representantes el símbolo 1 está sobre la directriz C E B D A.

Los representantes de clases 15–17 son no-cambiables y tienen los tres números 1, 2, 3 sobre las directrices del cuadrado latino: estas son del tipo $6h$ en F66. Todos los representantes de clase en la Tabla 2 tienen el número 1 sobre la directriz C A D B E en orden para los renglones, el número 2 sobre la directriz D B E C A y el número 3 sobre E C A D B; estos solamente

TABLA 2. Representantes de clase de objetos de cuatro clasificaciones construidos sobre cuadrados latinos de 5×5 de clase II

1	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	2	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	3	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	4	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	5	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	6	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_3	C_3	D_0	E_2	A_1		B_3	C_3	D_2	E_0	A_1		B_1	C_2	D_0	E_0	A_3		B_1	C_2	D_0	E_3	A_0		B_1	C_2	D_1	E_3	A_0		B_1	C_2	D_0	E_0	A_3
	C_2	D_1	E_0	A_3	B_0		C_2	D_1	E_0	A_3	B_2		C_1	D_3	E_0	A_1	B_2		C_3	D_1	E_0	A_1	B_2		C_3	D_0	E_0	A_1	B_2		C_0	D_3	E_1	A_1	B_2
	D_0	E_1	A_3	B_1	C_2		D_0	E_2	A_3	B_1	C_0		D_3	E_1	A_2	B_2	C_0		D_3	E_1	A_2	B_0	C_2		D_3	E_1	A_2	B_2	C_0		D_3	E_1	A_2	B_2	C_0
	E_1	A_2	B_2	C_0	D_3		E_1	A_2	B_1	C_0	D_3		E_2	A_0	B_3	C_3	D_1		E_2	A_3	B_3	C_0	D_1		E_2	A_3	B_3	C_0	D_1		E_2	A_0	B_3	C_3	D_1
7	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	8	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	9	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	10	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	11	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	12	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_1	C_2	D_0	E_0	A_3		B_1	C_2	D_0	E_3	A_0		B_1	C_2	D_0	E_3	A_0		B_1	C_2	D_0	E_1	A_3		B_1	C_2	D_0	E_2	A_3		B_2	C_3	D_0	E_1	A_2
	C_0	D_3	E_2	A_1	B_2		C_3	D_1	E_0	A_1	B_2		C_3	D_2	E_0	A_1	B_2		C_2	D_3	E_0	A_1	B_2		C_1	D_3	E_0	A_1	B_2		C_3	D_1	E_2	A_0	B_1
	D_3	E_1	A_2	B_1	C_0		D_3	E_1	A_2	B_2	C_0		D_3	E_1	A_2	B_1	C_0		D_3	E_1	A_2	B_0	C_0		D_3	E_1	A_2	B_0	C_0		D_1	E_2	A_3	B_3	C_0
	E_2	A_0	B_3	C_3	D_1		E_2	A_3	B_3	C_0	D_1		E_2	A_3	B_3	C_0	D_1		E_2	A_0	B_3	C_3	D_1		E_2	A_0	B_3	C_3	D_1		E_0	A_1	B_0	C_2	D_3
13*a*	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	13*b*	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	14	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	15	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	16	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	17	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_2	C_3	D_0	E_1	A_2		B_3	C_0	D_3	E_1	A_2		B_3	C_0	D_3	E_1	A_2		B_2	C_3	D_0	E_1	A_1		B_2	C_3	D_0	E_0	A_1		B_2	C_3	D_0	E_0	A_1
	C_3	D_0	E_2	A_0	B_1		C_0	D_2	E_0	A_3	B_1		C_1	D_2	E_0	A_3	B_1		C_0	D_1	E_2	A_3	B_1		C_0	D_1	E_2	A_3	B_2		C_0	D_1	E_2	A_3	B_3
	D_1	E_2	A_3	B_3	C_0		D_1	E_3	A_1	B_0	C_2		D_1	E_3	A_0	B_0	C_2		D_3	E_0	A_2	B_1	C_2		D_3	E_0	A_3	B_1	C_2		D_3	E_0	A_1	B_1	C_2
	E_0	A_1	B_1	C_2	D_3		E_2	A_1	B_2	C_3	D_0		E_2	A_1	B_2	C_3	D_0		E_1	A_2	B_3	C_3	D_0		E_1	A_2	B_3	C_1	D_0		E_1	A_2	B_3	C_2	D_0
18	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	19	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	20	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	21	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	22	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	23	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_3	C_0	D_0	E_1	A_2		B_3	C_0	D_0	E_1	A_2		B_3	C_0	D_0	E_1	A_2		B_3	C_1	D_0	E_1	A_2		B_3	C_2	D_0	E_1	A_2		B_3	C_3	D_0	E_1	A_2
	C_2	D_3	E_1	A_0	B_1		C_2	D_3	E_2	A_0	B_1		C_2	D_3	E_3	A_0	B_1		C_2	D_3	E_0	A_0	B_1		C_2	D_3	E_0	A_0	B_1		C_2	D_3	E_0	A_1	B_1
	D_1	E_2	A_3	B_2	C_0		D_1	E_2	A_3	B_3	C_0		D_1	E_2	A_3	B_1	C_0		D_1	E_2	A_3	B_2	C_0		D_1	E_2	A_3	B_3	C_0		D_1	E_2	A_3	B_1	C_0
	E_0	A_1	B_2	C_3	D_3		E_0	A_1	B_2	C_3	D_1		E_0	A_1	B_2	C_3	D_2		E_0	A_1	B_2	C_3	D_3		E_0	A_1	B_2	C_3	D_1		E_0	A_1	B_2	C_3	D_2

difieren en las ocurrencias de los símbolos 1, 2, 3 sobre los renglones 3, 4, 5 que no están sobre directrices, siendo estas permutadas cíclicamente en los representantes.

Cada representante de clase tiene otra solución con estos últimos tres números en un orden diferente, de modo que las seis posibilidades son las descritas como tipo $6h$ en F66.

Las seis clases restantes, 18–23, son todas cambiables y tienen todos los cuatro números 0, 1, 2, 3 sobre directrices: son del tipo $6i$ en F66. Consideremos las posibilidades entre aquellos que tienen 0, 0, 1, 2, 3 en algún orden sobre la diagonal principal del cuadrado latino. El primer renglón tiene cuatro arreglos posibles con 0 en la primera columna, cada uno de los cuales tiene $4! = 24$ arreglos de los símbolos restantes sobre la diagonal principal, contabilizando $4 \times 24 = 96$ arreglos en total. Hay seis clases y se tiene que cada una posee 16 soluciones de ese tipo: $6 \times 16 = 96$, como se requiere.

Todos los representantes en la Tabla 2 tienen 0 sobre la directriz B D A C E en orden para los renglones, 1 sobre la directriz C E B D A, 2 sobre la directriz D A C E B y 3 sobre la directriz E B D A C.

Se puede pensar de estos representantes de clase como que están en dos conjuntos de 3 con única variante con respecto a los números sobre la diagonal principal: los representantes 18–20 tienen 0 en el segundo renglón y columna con una permutación cíclica de 1, 2, 3 en los otros renglones y columnas, mientras que los representantes 21–23 tienen 0 en el tercer renglón y columna con una permutación cíclica de 1, 2, 3.

Ahora vamos a considerar el efecto de la propiedad de cambiabilidad en las clases que son cambiables, cuando se estudiaron las clases 6–11, 12–14 y 18–23 por separado. Las estructuras obtenidas al cambiar 0 con 1, 2 o 3 para cada una de estos representantes de clase son listados en detalle por Freeman y Góngora-Aldaz [2001]. Aquí sólo presentaremos las conclusiones de ese estudio. Se obtuvo que mientras algunos cambios conducen a un elemento en la misma clase, para cada clase hay dos o más cambios que conducen a una solución en clases diferentes. Un cambio no necesariamente conduce a un elemento en una clase con el mismo número de pivotes.

3.2. Cuadrados latinos de la clase I

Este representante de clase posee tres directrices, todas las cuales pasan a través de una celda, B en el segundo renglón y primera columna del cuadrado #7. Todos los elementos equivalentes tienen que retener esta celda en la misma posición, limitando entonces los ordenamientos posibles de renglones y columnas. Hay 72 elementos equivalentes al cuadrado #7 en el sentido definido aquí, como se listan en la Tabla 3.

La Tabla 3 muestra las 12 posibilidades para cada una de las siguientes operaciones: el cuadrado tal como está escrito; transposición de renglones y

Tabla 3. Elementos equivalentes al cuadrado #7 de la clase I

	Como está escrito	*Tr*	*(RL)*	*(RL) Tr*	*(CL)*	*(CL) Tr*
01	R(12345) C(12345)	R(21354) C(21354)	R(12354) C(12435)	R(21345) C(21534)	R(12354) C(21543)	R(12345) C(21453)
02	R(12453) C(12453)	R(21543) C(21543)	R(12543) C(12354)	R(21453) C(21345)	R(12543) C(21435)	R(12453) C(21534)
03	R(12534) C(12534)	R(21435) C(21435)	R(12435) C(12543)	R(21534) C(21453)	R(12435) C(21354)	R(12534) C(21345)
04	R(32154) C(15432)	R(31245) C(24531)	R(32145) C(15342)	R(31254) C(24351)	R(32145) C(23451)	R(32154) C(23541)
05	R(32541) C(15324)	R(31452) C(24315)	R(32451) C(15423)	R(31542) C(24513)	R(32451) C(23514)	R(32541) C(23415)
06	R(32415) C(15243)	R(31524) C(24153)	R(32514) C(15234)	R(31425) C(24135)	R(32514) C(23145)	R(32415) C(23154)
07	R(42135) C(13542)	R(41253) C(25341)	R(42153) C(13452)	R(41235) C(25431)	R(42153) C(24531)	R(42135) C(24351)
08	R(42351) C(13425)	R(41532) C(25413)	R(42531) C(13524)	R(41352) C(25314)	R(42531) C(24315)	R(42351) C(24513)
09	R(42513) C(13254)	R(41325) C(25134)	R(42315) C(13245)	R(41523) C(25143)	R(42315) C(24153)	R(42513) C(24135)
10	R(52143) C(14352)	R(51234) C(23451)	R(52134) C(14532)	R(51243) C(23541)	R(52134) C(25341)	R(52143) C(25431)
11	R(52431) C(14523)	R(51342) C(23514)	R(52341) C(14325)	R(51432) C(23415)	R(52341) C(25413)	R(52431) C(25314)
12	R(52314) C(14235)	R(51423) C(23145)	R(52413) C(14253)	R(51324) C(23154)	R(52413) C(25134)	R(52314) C(25143)

columnas, (Tr); intercambio de renglones y letras, (RL); intercambio de renglones y letras seguido por transposición, (RL) Tr; intercambio de columnas y letras, (CL); intercambio de columnas y letras seguido de transposición (CL) Tr; Se halla que el intercambio de renglones y letras seguido por intercambio de columnas y letras no genera un elemento adicional para la clase.

En la Tabla 3 se muestra los ordenamientos simultáneos de renglones y columnas: por ejemplo, el cuadrado tal como está escrito es R(12345) C(12345), mientras que uno de los rearreglos por medio de transposiciones es Tr R(21435) C(21435). No todos los 72 isomorfismos pueden dar origen a una solución para la adición de cuatro tratamientos con dos 0's en el primer renglón, siendo el máximo teórico de 36, tomando alguno de los dos renglones con dos 0's como el primer renglón.

El número de elementos equivalentes de las diversas soluciones va de 1, *i.e.* una solución única, a 36. La Tabla 4 lista el número de soluciones con diferente número de elementos equivalentes, con clasificación-cruzada por referencia a F66 con respecto a la presencia de una directriz, cambiabilidad y, por soluciones cambiables, 6*a* y 6*c*, el número de pivotes. Los tipos 6*a* y 6*b* no poseen directrices mientras que cada uno de 6*c* y 6*d* posee una. Se puede verificar que de las $9 \times 11 = 99$ celdas en la Tabla 4 sólo hay soluciones para 39. Estos a su vez dan origen a 292 elementos.

TABLA 4. Número de elementos encriptados construidos sobre el representante de cuadrados latinos de clase I

Número de elementos	*6a 1 pivote*	*6a 2 pivotes*	*6a 3 pivotes*	*6a 4 pivotes*	*6b*	*6c 1 pivote*	*6c 2 pivotes*	*6c 3 pivotes*	*6d*	*Total*
1	—	—	—	2	—	—	—	—	—	2
2	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2
6	2	—	—	2	1	—	—	1	—	6
9	1	2	—	2	—	—	—	—	—	5
12	—	2	—	—	2	—	1	—	—	5
15	—	5	2	—	—	—	—	—	—	7
18	4	6	—	—	4	—	2	—	2	18
24	10	12	—	—	13	15	7	—	4	61
30	43	28	5	—	4	34	15	—	4	133
36	12	12	—	—	6	12	3	—	7	52
Total	74	67	7	7	30	61	28	1	17	292

No existe manera obvia de clasificar las órbitas mostradas en la Tabla 4. Se iniciará la clasificación estudiando las clases cuyos representantes son de alguna manera similares. Así, considere los tres representantes en la Tabla 5, donde w, x, y, z representan 0, 1, 2, 3 en algún orden:

TABLA 5. Algunos objetos con estructuras análogas

A_w	$B_?$	C_x	D_y	E_z		$A_?$	B_w	C_x	D_y	E_z		A_w	B_x	$C_?$	D_y	E_z
$B_?$	A_w	D_z	E_x	C_y		B_w	$A_?$	D_z	E_x	C_y		B_y	A_z	D_x	E_w	$C_?$
C_y	D_x	E_w	A_z	$B_?$		C_z	D_y	E_w	$A_?$	B_x		$C_?$	D_w	E_z	A_x	B_y
D_z	E_y	$B_?$	C_w	A_x		D_x	E_z	B_y	C_w	$A_?$		D_z	E_y	B_w	$C_?$	A_x
E_x	C_z	A_y	$B_?$	D_w		E_y	C_x	$A_?$	B_z	D_w		E_x	$C_?$	A_y	B_z	D_w

En la Tabla 5 cada solución tiene w, x, y, z una vez en cada renglón y cada columna; w, x, y, z ocurren una vez o dos veces con cada letra, todas las segundas ocurrencias aparecen con la letra mayúscula en la primera columna del primer cuadrado, el primer renglón del segundo cuadrado y el tercer renglón del tercer cuadrado. Para todos estos, las operaciones R(12453) C(12453) y R(12534) C(12534) producen el mismo arreglo. Entonces solamente es necesario considerar valores de $(w, x) = (0, 1)$ o $(1, 0)$, mientras que $(y, z) = (2, 3)$.

El segundo y tercer cuadrado son equivalentes entre sí, y la única razón para considerar ambos es que esto nos permite tener siempre dos 0's en el primer renglón. No es necesario considerar alguna otra solución, ya que todos resultan equivalentes al segundo o tercer representante.

Ciertamente, no hay otras soluciones distintas de este tipo. Lo que es más, las soluciones con $(w, x) = (1, 0)$ en el tercer cuadrado son todas equivalentes a aquellas con $(w, x) = (0, 1)$ en el mismo cuadrado, por lo que se descartan desde ahora.

Siempre hay dos 0's en el primer renglón en los representantes dados en la Tabla 5. Los números restantes sobre B en el cuadrado a la izquierda, A en el cuadrado del centro o C en el cuadrado de la derecha deben ser entonces 0, 1, 2, 3 en algún orden, resultando en $4! = 24$ posibilidades para cada conjunto de valores para w, x, y, z. Esto a su vez significa que hay $5 \times 24 = 120$ soluciones de este tipo. De hecho no hay 120 clases diferentes sino 53, que contienen 1, 2, 3, 4 u 8 elementos.

La presencia del 0 extra en el primer renglón significa que las soluciones son todas cambiables, mientras que es fácil ver que ninguna de ellas contiene una directriz; así, todas estas soluciones son de tipo $6a$.

Finalmente, debe haber al menos dos pivotes, ya que ambos 0's sobre B, A o C, sea cual sea el caso, son pivotes; también podría haber uno o dos pivotes adicionales.

Los representantes de clase para cada una de las 292 clases de equivalencia fueron dadas por Freeman y Góngora-Aldaz [2000]. La Tabla 6 muestra representantes de una clase en cada una de las 39 celdas mostradas en la Tabla 4 como que tienen un elemento, en el orden de los renglones de la

Tabla 6. Representantes de clase de objetos de cuatro clasificaciones construidos sobre cuadrados latinos de 5×5 de clase I

$1a4*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$2a4$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$3a1$	A_1	B_2	C_0	D_0	E_3	$6a1$	A_0	B_1	C_2	D_0	E_3	$6a4*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$6b$	A_1	B_2	C_0	D_3	E_0
	B_0	A_0	D_3	E_1	C_2		B_0	A_0	D_1	E_2	C_3		B_0	A_0	D_3	E_1	C_2		B_0	A_3	D_1	E_2	C_0		B_0	A_0	D_3	E_1	C_2		B_0	A_3	D_2	E_1	C_3
	C_2	D_1	E_0	A_3	B_2		C_2	D_3	E_0	A_1	B_1		C_3	D_1	E_2	A_2	B_0		C_1	D_2	E_0	A_1	B_3		C_2	D_1	E_0	A_3	B_1		C_1	D_0	E_3	A_0	B_2
	D_3	E_2	B_3	C_0	A_1		D_3	E_1	B_2	C_0	A_2		D_2	E_3	B_1	C_0	A_3		D_3	E_1	B_0	C_3	A_2		D_3	E_2	B_2	C_0	A_1		D_3	E_1	B_1	C_2	A_0
	E_1	C_3	A_2	B_1	D_0		E_1	C_2	A_3	B_3	D_0		E_0	C_1	A_2	B_3	D_1		E_2	C_0	A_3	B_2	D_1		E_1	C_3	A_2	B_3	D_0		E_2	C_0	A_2	B_3	D_1
$6c3$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$9a1$	A_1	B_2	C_3	D_0	E_0	$9a2*$	A_1	B_0	C_0	D_2	E_3	$9a4*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$12a2*$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$12b$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3
	B_1	A_0	D_0	E_2	C_3		B_0	A_0	D_1	E_3	C_2		B_0	A_1	D_3	E_0	C_2		B_0	A_0	D_3	E_1	C_2		B_1	A_0	D_3	E_0	C_2		B_0	A_2	D_3	E_0	C_1
	C_2	D_3	E_1	A_1	B_0		C_0	D_3	E_1	A_2	B_1		C_2	D_0	E_1	A_3	B_2		C_2	D_1	E_0	A_3	B_1		C_3	D_2	E_1	A_2	B_0		C_3	D_0	E_1	A_1	B_2
	D_3	E_1	B_2	C_0	A_2		D_2	E_2	B_0	C_1	A_3		D_3	E_2	B_3	C_1	A_0		D_3	E_2	B_3	C_0	A_1		D_0	E_3	B_2	C_1	A_3		D_1	E_3	B_2	C_0	A_3
	E_0	C_2	A_3	B_3	D_1		E_3	C_1	A_2	B_3	D_0		E_0	C_3	A_2	B_1	D_1		E_1	C_3	A_2	B_2	D_0		E_2	C_0	A_1	B_3	D_1		E_2	C_2	A_1	B_3	D_0
$12c2$	A_1	B_2	C_3	D_0	E_0	$15a2*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$15a3*$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$18a1$	A_0	B_1	C_2	D_3	E_0	$18a2*$	A_1	B_0	C_0	D_2	E_3	$18b$	A_1	B_2	C_0	D_3	E_0
	B_0	A_3	D_1	E_2	C_1		B_2	A_0	D_3	E_1	C_2		B_1	A_1	D_3	E_0	C_2		B_0	A_3	D_2	E_0	C_1		B_0	C_1	D_3	E_0	A_2		B_0	A_3	D_1	E_1	C_2
	C_2	D_1	E_0	A_0	B_3		C_2	D_1	E_0	A_3	B_0		C_3	D_2	E_1	A_2	B_0		C_2	D_0	E_1	A_1	B_3		C_2	D_0	E_1	A_3	B_1		C_3	D_0	E_2	A_0	B_1
	D_3	E_1	B_2	C_3	A_0		D_3	E_2	B_1	C_0	A_1		D_0	E_3	B_2	C_1	A_3		D_1	E_2	B_0	C_3	A_2		D_3	E_2	A_2	B_1	C_0		D_2	E_0	B_3	C_1	A_2
	E_3	C_0	A_2	B_1	D_2		E_1	C_3	A_2	B_3	D_0		E_2	C_0	A_0	B_3	D_1		E_3	C_0	A_3	B_2	D_1		E_0	A_3	B_2	C_3	D_1		E_3	C_1	A_0	B_2	D_3
$18c2$	A_0	B_1	C_2	D_3	E_0	$18d$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$24a1$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$24a2*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$24b$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$24c1$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_2	A_3	D_0	E_1	C_1		B_2	A_3	D_1	E_0	C_1		B_0	A_2	D_3	E_0	C_1		B_0	A_1	D_3	E_1	C_2		B_0	A_2	D_3	E_0	C_1		B_1	A_2	D_0	E_0	C_3
	C_3	D_1	E_0	A_2	B_0		C_3	D_0	E_2	A_1	B_0		C_3	D_0	E_1	A_1	B_2		C_3	D_2	E_0	A_0	B_1		C_3	D_0	E_1	A_1	B_2		C_0	D_3	E_1	A_1	B_2
	D_1	E_2	B_3	C_0	A_3		D_2	E_0	B_3	C_1	A_2		D_1	E_3	B_2	C_2	A_0		D_1	E_3	B_2	C_0	A_2		D_1	E_0	B_2	C_2	A_3		D_3	E_1	B_2	C_2	A_0
	E_3	C_0	A_1	B_2	D_2		E_1	C_2	A_0	B_3	D_3		E_2	C_0	A_3	B_3	D_1		E_2	C_1	A_3	B_3	D_0		E_2	C_3	A_1	B_3	D_0		E_2	C_0	A_3	B_3	D_1
$24c2$	A_0	B_1	C_2	D_3	E_0	$24d$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$30a1$	A_0	B_1	C_2	D_3	E_0	$30a2*$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$30a3*$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$30b$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3
	B_0	A_2	D_0	E_1	C_3		B_1	A_2	D_0	E_3	C_0		B_0	A_2	D_1	E_2	C_3		B_1	A_0	D_3	E_1	C_2		B_1	A_1	D_3	E_0	C_2		B_0	A_2	D_1	E_3	C_1
	C_1	D_0	E_1	A_3	B_2		C_2	D_1	E_0	A_1	B_3		C_3	D_0	E_0	A_1	B_2		C_2	D_1	E_0	A_3	B_0		C_3	D_2	E_1	A_3	B_0		C_2	D_0	E_2	A_1	B_3
	D_2	E_2	B_3	C_0	A_1		D_3	E_1	B_2	C_0	A_2		D_2	E_3	B_3	C_0	A_1		D_3	E_2	B_2	C_0	A_1		D_0	E_3	B_2	C_1	A_2		D_3	E_0	B_1	C_0	A_2
	E_3	C_3	A_0	B_2	D_1		E_2	C_3	A_3	B_0	D_1		E_1	C_1	A_3	B_2	D_0		E_1	C_3	A_2	B_3	D_0		E_2	C_0	A_0	B_3	D_1		E_1	C_3	A_3	B_2	D_0
$30c1$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$30c2$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$30d$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$36a1$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3	$36a2*$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$36b$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3
	B_2	A_3	D_0	E_0	C_1		B_2	A_3	D_1	E_0	C_0		B_1	A_2	D_0	E_0	C_3		B_1	A_2	D_3	E_0	C_2		B_2	A_3	D_1	E_0	C_1		B_1	A_2	D_0	E_3	C_2
	C_3	D_1	E_2	A_1	B_0		C_3	D_0	E_2	A_1	B_1		C_1	D_3	E_0	A_1	B_2		C_2	D_1	E_0	A_3	B_3		C_2	D_0	E_3	A_1	B_2		C_2	D_1	E_1	A_0	B_3
	D_3	E_0	B_1	C_2	A_2		D_3	E_2	B_0	C_1	A_2		D_3	E_1	B_2	C_2	A_0		D_3	E_1	B_2	C_0	A_1		D_3	E_2	B_0	C_0	A_1		D_3	E_0	B_2	C_0	A_1
	E_1	C_2	A_3	B_3	D_0		E_1	C_2	A_3	B_3	D_0		E_2	C_0	A_3	B_3	D_1		E_2	C_3	A_0	B_1	D_0		E_1	C_3	A_2	B_3	D_0		E_2	C_3	A_3	B_1	D_0
$36c1$	A_0	B_1	C_0	D_2	E_3	$36c2$	A_1	B_2	C_0	D_0	E_3	$36d$	A_0	B_0	C_1	D_2	E_3																		
	B_2	A_3	D_1	E_0	C_1		B_0	A_3	D_2	E_1	C_1		B_1	A_2	D_0	E_1	C_3																		
	C_3	D_0	E_2	A_1	B_0		C_3	D_1	E_0	A_0	B_2		C_2	D_3	E_0	A_1	B_2																		
	D_1	E_2	B_3	C_0	A_2		D_3	E_0	B_1	C_2	A_2		D_3	E_1	B_2	C_0	A_1																		
	E_1	C_2	A_0	B_3	D_3		E_2	C_1	A_3	B_3	D_0		E_2	C_0	A_3	B_3	D_0																		

Tabla 4. Así, el primer representante es una de las dos únicas soluciones, la otra es la que tiene dos elementos, y así sucesivamente.

No existe razón particular para seleccionar algún elemento en particular de una celda de la Tabla 4 o para seleccionar un elemento sobre otro para representar la clase. Un representante de las soluciones en la Tabla 5 siempre es mostrado en la Tabla 6 si uno de estos existe.

Para todas las órbitas usualmente seleccionaríamos un representante con dos 0's en ambos el primer y segundo renglón si existe alguno: esto es imposible para cualquier clase con 36 elementos y para algunas otras.

Para ayudar con una fácil identificación del origen de los representantes en la Tabla 6 se provee al lector con una llave. Esta es de la forma itp, donde i es el número de elementos equivalentes, t es el tipo dentro de 6 de F66, a, b, c o d, y p es el número de pivotes, si hay alguno; las soluciones que provienen de aquellas en la Tabla 5 tienen, de modo adicional, un asterisco.

Por ejemplo, una solución con dos pivotes de tipo $6a$ y 30 elementos equivalentes que provienen de la Tabla 5 aparece como $30a2^*$, y un representante de una clase que contiene 12 elementos de tipo $6b$ se denota como $12b$.

La "celda directriz" del cuadrado latino, la que aparece en el renglón 2 y columna 1, es un pivote en muchos representantes de órbita cambiables que no poseen una directriz. Esta celda siempre es el pivote en representantes de clase que poseen un solo pivote y 3, 6, 9 o 18 elementos, pero otra celda es el pivote para aquellos representantes de 24, 30 o 36 elementos.

En donde existen dos pivotes esta celda es un pivote para los representantes de clases con 9 elementos y en tres de las seis clases con 18 elementos, incluyendo la mostrada en la Tabla 6, pero no en cualquiera de los otros.

En donde se tiene tres pivotes esta celda nunca es un pivote, pero en donde hay 4 pivotes estos son las celdas en el cuadrado de 2×2 de la parte superior izquierda, que entonces incluye esta celda.

Algunos pares de representantes de clase de la misma celda de la Tabla 4 son muy similares. Así, como en los que figuran en la Tabla 5 sólo hay dos cantidades diferentes para los representantes mostrados en Freeman y Góngora-Aldaz [2000] para muchos otros pares.

Algunos representantes de clase difieren sólo en dos celdas de otros dos representantes: seis difieren solamente en dos celdas de otros tres representantes y, finalmente, uno difiere en solo dos celdas de otros cuatro representantes.

Todos los elementos equivalentes tienen que retener la celda directriz en la misma posición limitando así los ordenamientos posibles de renglones y columnas. Debido a que la propiedad de *cambiabilidad* no tiene efecto sobre si un número ocurre en una directriz o no, estas situaciones se tratan por separado.

Las Tablas 7 y 8 listan los representantes cambiables con diferentes números de elementos por clase, en clasificación cruzada con respecto al número de pivotes: La Tabla 7 lista aquellos representantes en los que no se tiene un número sobre una directriz y la Tabla 8 lista aquellas soluciones donde sí ocurre.

Hay 245 representantes de clase cambiables, 155 sin directrices y 90 con una directriz.

TABLA 7. Número de elementos encriptados para el representante de cuadrados latinos de clase I sin directrices

Número de elementos	*1 pivote*	*2 pivotes*	*3 pivotes*	*4 pivotes*	*Total*
1	—	—	—	2	2
2	—	—	—	1	1
3	2	—	—	—	2
6	2	—	—	2	4
9	1	2	—	2	5
12	—	2	—	—	2
15	—	5	2	—	7
18	4	6	—	—	10
24	10	12	—	—	22
30	43	28	5	—	76
36	12	12	—	—	24
Total	74	67	7	7	155

TABLA 8. Elementos encriptados para el representante de cuadrados latinos de clase I con una directriz

Número de elementos	*1 pivote*	*2 pivotes*	*3 pivotes*	*Total*
6	—	—	1	1
12	—	1	—	1
18	—	2	—	2
24	15	7	—	22
30	34	15	—	49
36	12	3	—	15
Total	61	28	1	90

Los resultados de cambiar 0 con 1, 2 o 3 para cada una de las órbitas en las Tablas 7 y 8 fueron consideradas por Freeman y Góngora-Aldaz [2001], reporte que se recomienda al lector interesado en mayores detalles.

Como la presencia de una directriz no se afecta bajo la acción de la propiedad de cambiabilidad, todos los cambios sobre los representantes de clase del tipo $6a$ o tipo $6c$ de F66 deben de resultar en clases del mismo tipo.

Para algunos representantes de clase con un pivote un cambio siempre cae en la misma clase, por ejemplo el representante de $6a1$ en la Tabla 6. Sin embargo, es más común que cualquier cambio conduzca a un representante de clase a otra clase, por ejemplo los representantes de $24a1$, $24c1$, $24c2$ y $36a2$ en la Tabla 6.

Ciertamente existen representantes de clase en donde los cambios conducen a tantas como 9 clases de equivalencia, digamos las cinco en la celda $30a3$ de la Tabla 6, incluyendo el representante mostrado en la Tabla 8. Como con la clase II, ocurre con frecuencia pero no siempre, que un cambio de un representante de clase conduce a una clase que tiene diferente número de pivotes que la clase original.

Por ejemplo, cambiar 0 con cualquiera de 1, 2, o 3 usando el pivote en la esquina superior izquierda del representante de $1a4$ en la Tabla 6 conduce a una solución en la misma clase, pero cualquier cambio usando otro pivote conduce a otra solución en la clase de tipo $15a2$ cuyo representante se muestra en la Tabla 6.

4. Conclusiones y aperturas de investigación

La encriptación de objetos combinatorios de cuatro clasificaciones que resultan de agregar $n-1$ símbolos a cuadrados latinos de tamaño $n \times n$, $n = 4, 5$, es comparativamente simple con respecto a su categorización en clases de equivalencia y la cambiabilidad de los representantes de clase. Sin embargo, es evidente de las Tablas 4, 7 y 8 que no hay un comportamiento particular para la categorización o cambiabilidad del caso de adicionar cuatro tratamientos a cuadrados de 5×5 de la clase I. Ni el número de elementos equivalentes en una clase ni la presencia o ausencia de una directriz indican alguna estructura en especial.

Se ha realizado un estudio similar, preliminar, de las soluciones para cuadrados de 6×6 de una clase, pero el problema aquí es muy complejo; no recibirá más atención en el presente artículo pero podría componer un tópico para otra investigación.

Finalmente, se han clasificado y encriptado objetos combinatorios de cuatro clasificaciones que resultan de agregar $n-1$ símbolos a cuadrados latinos de tamaño $n \times n$, $n = 4, 5$.

El potencial de las herramientas de matemáticas discretas sobre otros objetos combinatorios con cuatro clasificaciones, digamos aquellos que resultan de agregar $n+1$ símbolos a cuadrados latinos de tamaño $n \times n$, no se ha explotado ni para valores pequeños de n.

Lo que es más, nadie parece haber explorado los efectos de la acción del grupo de simetrías del cuadrado sobre cuadrados latinos.

Referencias

[1] Finney, D. J., "Some Orthogonal Properties of the 4×4 and 6×6 Latin Squares". *Ann. Eugenics* **12**, 213–219 (1945).

[2] Fisher, R. A. y F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Oliver and Boyd, Edinburgo, 1938.

[3] Freeman, G. H., "Some Non-Orthogonal Partitions of 4×4, 5×5 and 6×6 Latin Squares", *Ann. Math. Statist.* **37**, 666–681 (1966).

[4] Freeman, G. H. y J. A. Góngora-Aldaz, *The Addition of 3 Treatments to a* 4×4 *Latin Square*, Departamento de Estadística, The University of Warwick, Research Report 346, 1999.

[5] Freeman, G. H. y J. A. Góngora-Aldaz, *The Addition of* $(n-1)$ *Treatments to an* $n \times n$ *Latin Square*, Departamento de Estadística, The University of Warwick, Research Report 378, 2000.

[6] Freeman, G. H. y J. A. Góngora-Aldaz, *Changeability: Classification of Arrangements of the Addition of* $(n-1)$ *Treatments to an* $n \times n$ *Latin Square*, Departamento de Estadística, The University of Warwick, Research Report 384, 2001.

[7] Góngora-Aldaz, J. A., *Writings on the Addition of Further Treatments to Latin Square Designs*, segunda edición, Departamento de Estadística, The University of Warwick, Research Report 318, 1997.

[8] Góngora-Aldaz, J. A. y G. H. Freeman, "Aplicaciones de matemáticas discretas sobre diseños por bloques", *Eureka* **15**, (Qro., México, 2000) pp. 40–56.

[9] Klima, R. E., N. Sigmon y E. Stitzinger, *Applications of Abstract Algebra with Maple*, CRC Press, EUA, 2000, pág. 21.

ABSTRACT

A Latin square is frequently written as an array of Latin letters in such a way that every letter appears exactly once in every row and column. Under the appropriate equivalence relation and for values $n = 4, 5$, the $n \times n$ Latin squares are divided into two orbits. For each of these two sizes, the Latin squares comprised therein differ as to whether or not a further set of n symbols can be added orthogonally. For $n = 4$ and 5, not only is the number of ways of adding $(n-1)$ symbols to Latin squares of size n unveiled but also the resulting arrays are *categorized* and *encrypted*. Some but not all of the class representatives are *changeable* in the sense of Freeman [1966]. The changeable class representatives are examined in more detail and it is found that changing an arrangement sometimes

leads to an element in the same class but more often to one in a different class. The *potential* of the tools of discrete mathematics upon those combinatorial objects that are constructed from the addition of $(n+1)$ symbols to $n \times n$ Latin squares appears not to have been explored, yet. Not even for small values of n.