Volúmenes de cilindros con la misma superficie lateral: una exploración para alumnos de nivel medio [1]

Glenda T. Lappan*
y
Alfinio Flores Peñafiel**

* Michigan State University
** Arizona State University
alfinio@asu.edu

Recibido: *julio de 2000*
Aceptado: *agosto de 2001*

El propósito de estas actividades es que los alumnos de nivel medio desarrollen una mejor comprensión de la fórmula para el volumen del cilindro (que está en función del radio de la base y de la altura del cilindro), y de cómo se altera el volumen al cambiar estas variables si se mantiene constante el área de la superficie lateral (que también está en función del radio y la altura). Otro objetivo es que los alumnos vean la ventaja de hacer razonamientos acerca de las cantidades (y no solamente hacer operaciones con los números que las representan), para entender mejor la situación. La notación algebraica permite a los alumnos ver con mayor claridad la relación entre las cantidades, y entender el porqué de un resultado que a primera vista resulta sorprendente.

Materiales. Hojas de papel tamaño carta, cinta adhesiva, material de empaque (bolitas de poliestireno) o palomitas de maíz, un cartón o superficie plana, calculadora.

Actividad 1. Los alumnos toman una hoja tamaño carta (21.6 cm por 27.9 cm) y forman con ella un cilindro uniendo los lados largos del rectán-

[1] Este artículo está basado en material presentado por Glenda Lappan en la sesión inaugural de la reunión anual del *National Council of Teachers of Mathematics*, Chicago, abril de 2000.

gulo. Luego toman otra hoja del mismo tamaño, y forman otro cilindro uniendo esta vez los lados más cortos del rectángulo. Los cilindros así formados tienen distintas formas: uno es angosto y largo, y el otro es más ancho y más bajo (figura 1).

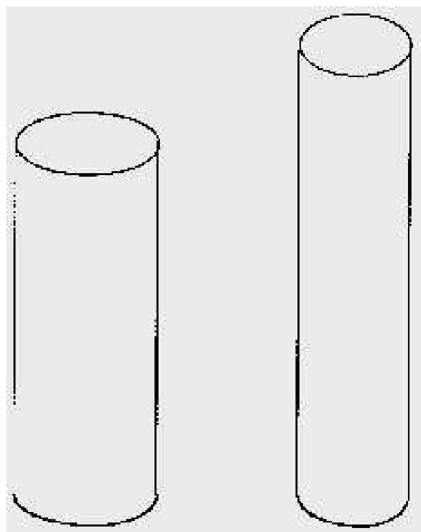

FIGURA 1. Dos cilindros construídos con rectángulos iguales.

Al pedir a los alumnos de nivel medio que comparen los volúmenes de los cilindros, una respuesta inmediata muy común es que tienen el mismo volumen, ya que fueron hechos con rectángulos del mismo tamaño. Otra respuesta común es que el cilindro más alto tiene más volumen. A fin de verificar su respuesta, los alumnos colocan el cilindro alto sobre un cartón y lo llenan de material de empaque o de palomitas de maíz. Luego vacían el contenido en el otro cilindro. Su cara refleja su sorpresa al ver que al cilindro más bajo y más ancho le faltó casi la cuarta parte para llenarse.

¿Por qué se ven iguales?

Nuestra percepción visual del tamaño de las cosas está influida fuertemente por la sección transversal que nos presentan. En el caso de los cilindros, cuando están en posición vertical y los vemos desde un lado, de modo que el borde superior se vea como una sola línea (y no como una elipse), la sección transversal está dada por el área de un rectángulo formado por el diámetro del cilindro y la altura. Para hojas de tamaño carta, los diámetros de los dos cilindros son $21.6/\pi \approx 6.9$ para el cilindro alto y angosto, y $27.9/\pi \approx 8.9$

para el cilindro ancho y bajo.

El área de la sección transversal de cada cilindro es por tanto

$$6.9 \times 27.9 \approx 192 \qquad \text{(alto y angosto)},$$

$$8.9 \times 21.6 \approx 192 \qquad \text{(bajo y ancho)}.$$

Es decir, las dos secciones transversales son iguales (figura 2).

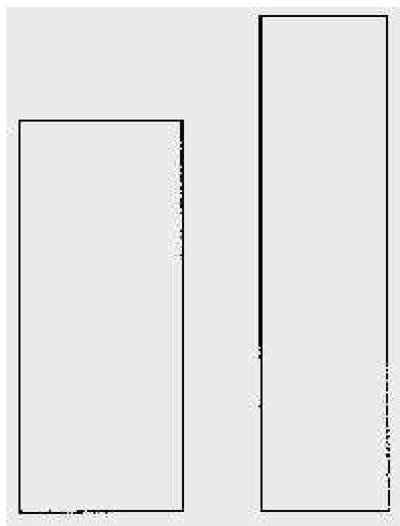

FIGURA 2. Los cilindros vistos de lado.

Si utilizamos letras para las cantidades, será evidente por qué las secciones transversales son iguales. Sea a el lado corto de la hoja tamaño carta, y b el lado largo (figura 3). En el caso del cilindro chaparro y bajo, como la circunferencia es b, el diámetro es b/π, su altura es a y el área de la sección

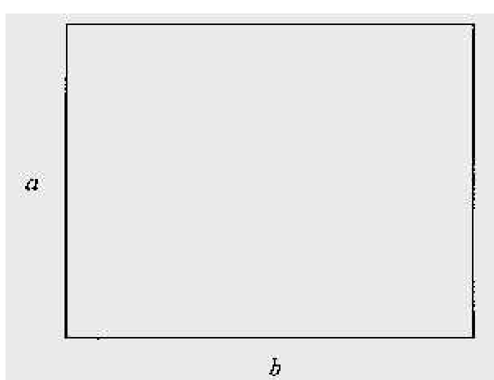

FIGURA 3. Rectángulo de base b y altura a.

transversal es $a \times (b/\pi)$. En el otro caso el diámetro es a/π y la altura es b, de modo que el área de la sección transversal es $b \times (a/\pi)$. Vemos así que el área de la sección transversal en ambos casos está dada por el producto

$$\frac{a \times b}{\pi}.$$

¿Por qué son diferentes los volúmenes?

Sin embargo, a pesar de que las secciones transversales son iguales, los volúmenes son diferentes. Para calcular el volumen de un cilindro hay que multiplicar el área de la base por la altura del cilindro. La base es circular, por lo que su área es $r^2 \times \pi$. En el caso del cilindro alto y delgado se tiene que el radio es $21.6\,\mathrm{cm}/2\pi \approx 3.4\,\mathrm{cm}$. El volumen será aproximadamente $1\,036\,\mathrm{cm}^3$ (redondeamos después de hacer todas las operaciones). En el caso del cilindro bajo y ancho, el radio es $27.9\,\mathrm{cm}/2\pi \approx 4.4\,\mathrm{cm}$, el volumen será aproximadamente $1\,338\,\mathrm{cm}^3$.

A fin de entender mejor el por qué de la diferencia, vamos a trabajar el volumen expresado en términos del largo y ancho de la hoja, expresados por variables. En el caso del cilindro ancho y chaparro, el radio será $b/2\pi$, el área de la base

$$\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{b^2}{4\pi}$$

y el volumen

$$\frac{b^2 \times a}{4\pi}.$$

De manera similar podemos obtener el volumen del cilindro alto y delgado, que será igual a

$$\frac{b \times a^2}{4\pi}.$$

Los alumnos pueden notar que en ambos casos hay un factor común, $(a \times b)/4\pi$, así que podemos reescribir los volúmenes como $b \times (a \times b/4\pi)$ y $a \times (a \times b/4\pi)$. Como $b > a$, se tiene que

$$b \times \frac{a \times b}{4\pi} > a \times \frac{a \times b}{4\pi},$$

es decir, el volumen del cilindro chaparro y ancho será mayor que el del alto y delgado.

En el caso del cilindro ancho y chaparro, el radio será $b/2\pi$, el área de la base $(b/2\pi)^2 \times \pi = b^2/4\pi$, y el volumen $(b^2 \times a)/4\pi$. De manera similar podemos obtener que el volumen del cilindro alto y delgado es $(b \times a^2)/4\pi$. Los alumnos pueden notar que en ambos casos hay un factor común, así que podemos reescribir los volúmenes como $b \times (a \times b)/4\pi$ y $a \times (a \times b)/4\pi$. Como $b > a$, el volumen del cilindro chaparro y ancho será mayor.

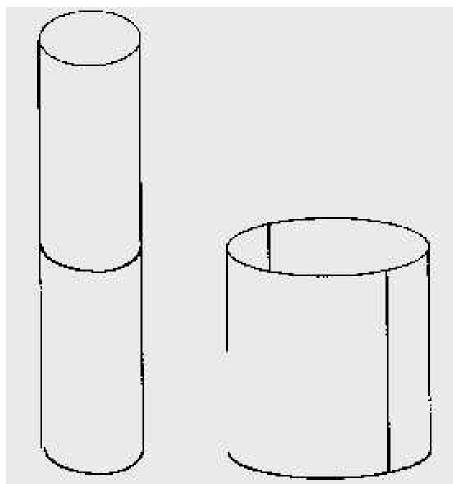

FIGURA 4. El cilindro se corta y se forma uno nuevo.

Actividad 2. Con una hoja tamaño carta, los alumnos construyen otro cilindro alto y angosto. Luego el cilindro es cortado a la mitad, y se desdobla. Se extienden los dos rectángulos y se anexan uno al otro, para formar una sola tira rectangular. Con esta tira de la mitad de alto y doble de largo se forma un cilindro chaparro y ancho (figura 4). La superficie lateral está formada por el mismo papel, simplemente pegado de otra forma, por lo que debe ser igual. Podemos ver ésto también algebraicamente. En el primer caso la superficie lateral es $a \times b$, y en el segundo caso $2a \times (b/2)$, de modo que son iguales. Se llena de palomitas el primer cilindro de la actividad 1 (que también era alto y delgado). Se pregunta a los alumnos qué tanto del otro cilindro se llenará con esa cantidad de palomitas. Los alumnos se sorprenden que las palomitas alcanzaron a llenar sólo la mitad del cilindro ancho y chaparro.

Veamos por qué es esto. Como vimos, el radio del primer cilindro es $a/2\pi$, el área de la base $a^2/4\pi$, y el volumen $(b \times a^2)/4\pi$. El segundo cilindro tendrá un radio dos veces más grande, $2a/2\pi = a/\pi$ y una altura de la mitad, $b/2$. Sin embargo, el área de la base es ahora $(a/\pi)^2 \times \pi = a^2/\pi$, cuatro veces más grande que para el cilindro anterior, y aunque la altura se redujo a la mitad, el volumen es igual a $(a^2/\pi) \times (b/2) = (a^2 \times b)/2\pi$, dos veces más grande que el anterior.

Si repetimos el proceso, cortando el cilindro a la mitad, desdoblando las dos partes y pegando los dos rectángulos para formar un nuevo cilindro, vemos que éste tiene un volumen todavía más grande. El nuevo radio será $2a/\pi$ y la altura $b/4$. El área de la base del nuevo cilindro es $4a^2/\pi$, y el volumen $(4a^2/\pi) \times (b/4) = (a^2 \times b)/\pi$, otra vez el doble que el anterior. Vemos así que cada vez que formamos un nuevo cilindro, cortando el anterior en dos y pegando las dos tiras para formar uno del doble de ancho y la mitad de chaparro, el volumen se duplica. Podemos organizar la información de manera sistemática en una tabla. La primera tabla expresa las cantidades numéricamente, la segunda tabla por medio de variables y números.

TABLA 1. Relaciones entre las cantidades en números (redondeados)

Lado del rectángulo	Altura del rectángulo y del cilindro (cm)	Radio del cilindro	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
21.6	27.9	3.4	37.1	1 036
43.2	14.0	6.9	148.5	2 072
86.4	7.0	13.8	594.0	4 143

TABLA 2. Relaciones entre las cantidades (símbolos algebraicos)

Lado del rectángulo	Altura del rectángulo y del cilindro (cm)	Radio del cilindro	Área de la base (cm^2)	Volumen (cm^3)
a	b	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{a^2}{4\pi}$	$V_1 = \frac{a^2b}{4\pi}$
$2a$	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{\pi}$	$\frac{a^2}{\pi}$	$\frac{a^2b}{2\pi} = 2V_1$
$4a$	$\frac{b}{4}$	$\frac{2a}{\pi}$	$\frac{4a^2}{\pi}$	$\frac{a^2b}{\pi} = 4V_1$
$8a$	$\frac{b}{8}$	$\frac{4a}{\pi}$	$\frac{16a^2}{\pi}$	$\frac{2a^2b}{2\pi} = 8V_1$

La expresión de los volúmenes por medio de letras (en vez de números) nos permite ver mejor por qué el volumen se incrementa cada vez por un factor de dos. Así, en principio, con la misma superficie lateral, podemos tener cilindros de volúmenes tan grandes como queramos. Los alumnos encuentran este resultado sorprendente y fascinante.

Conclusión

Una ventaja de estas actividades es que los alumnos, sorprendidos por los resultados, muestran interés tanto en la fórmula para el volumen del cilindro, así como en el análisis de las cantidades involucradas, y el uso de símbolos algebraicos para estudiar la situación. Para ayudar a los alumnos en la transición de la aritmética al álgebra, es importante que aprendan a tratar con las cantidades como objetos matemáticos que tienen interés por sí mismos, y no únicamente como números con los que operamos para obtener un resultado.