La densidad integrada de estados para el laplaciano unidimensional

Rafael René del Río Castillo*
y
Herminio Blancarte Suárez**

* IIMAS, UNAM,
Circuito Escolar s/n, Ciudad Universitaria,
04510 Coyoacán, México, D. F.
delrio@servidor.unam.mx
** Licenciatura en Matemáticas Aplicadas,
Facultad de Ingeniería, UAQ,
Centro Universitario, Cerro de las Campanas s/n,
76010 Santiago de Querétaro, Qro.
herbs@sunserver.dsi.uaq.mx

RECIBIDO: *junio de 2001*
ACEPTADO: *noviembre de 2001*

RESUMEN

Se calcula la densidad integrada de estados para el operador Laplaciano en una dimension (segunda derivada) en el caso continuo y en el caso discreto, y se muestra que en el caso continuo es independiente de las condiciones de frontera de Dirichlet y de Newmann.

La densidad integrada de estados N^X

La densidad integrada de estados N^X es una medida del número promedio de estados de un sistema por unidad de volumen. Dado un operador H, si consideramos la restricción H^X_Λ, del operador a una región Λ acotada y regular con condiciones de frontera X impuestas en $\partial\Lambda$, donde $X = D$ significa condiciones de Dirichlet y $X = N$ condiciones de Newmann. Resulta que H_Λ^X tiene sólo espectro discreto que denotamos por $\left\{E_j(\Lambda)\right\}_{j\in\mathbf{N}}$. Si el conjunto de autovalores está ordenado en forma no decreciente

$$-\infty < E_1(\Lambda) \leq E_2(\Lambda) \leq \cdots < \infty,$$

donde repetimos el autovalor de acuerdo a su multiplicidad, definimos entonces para $E \in \mathbb{R}$,

$$N_\Lambda^X(E) = \frac{1}{|\Lambda|}\sharp\left\{j : E_j(\Lambda) \leq E \quad (i.m.)\right\},$$

donde $(i.m.)$ significa que se incluyen las multiplicidades de los autovalores, $|\Lambda|$ denota el volumen de Λ. Así se define la densidad integrada de estados como

$$N^X := \lim_{|\Lambda|\to\infty} N_\Lambda^X(E).$$

Véase Combes y Hislop, [1997].

El caso del laplaciano continuo unidimensional

Es un hecho conocido que para el laplaciano sobre $\mathbb{R}^d$ véanse Combes y Hislop [1997] y Cycon *et al.* [1987], que $N^X(E)$ se comporta como

$$N^X(E) \sim E^{d/2}.$$

Calculemos N^X para el operador

$$H_\Lambda^X = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{y} \quad \Lambda = [0,b], \quad d=1, \quad X = D \quad \text{o} \quad X = N.$$

Para $X = D$ tenemos que

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \quad \text{en} \quad [0,b] \quad \text{con} \quad u(0) = u(b) = 0,$$

en este caso

$$N_{[0,b]}^D(E) = \frac{1}{b}\sharp\left\{n : \lambda_n(b) \leq E \quad (i.m.)\right\},$$

y los autovalores $\lambda_n = n^2\pi^2/b^2$, $n > 0$. Así

$$N^D_{[0,b]}(E) = \frac{1}{b}\sharp\left\{n : \frac{n^2\pi^2}{b^2} \leq E \quad (i.m.)\right\},$$

de ahí que $n \leq b\sqrt{E}/\pi$, si $E > 0$ (si $E < 0$, $N^D = 0$)

$$N^D_{[0,b]}(E) = \frac{1}{b}\left[\frac{b\sqrt{E}}{\pi}\right],$$

donde $[x]$, denota la función "mayor entero menor o igual que x". Entonces

$$\left|N^D_{[0,b]}(E) - \frac{\sqrt{E}}{\pi}\right| = \frac{1}{b}\left|\left[\frac{b\sqrt{E}}{\pi}\right] - \frac{b\sqrt{E}}{\pi}\right| \leq \frac{1}{b},$$

así

$$\lim_{b\to\infty} N^D_{[0,b]}(E) = \left(\frac{b}{\pi}\right)\sqrt{E}.$$

Para el caso $X = N$, el cálculo es análogo pero considerando el conjunto de autovalores

$$\lambda_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{b^2},$$

y se obtiene el mismo resultado. ■

En el caso del laplaciano continuo unidimensional, la densidad integrada de estados N^X, es independiente de la condición de frontera X. Para resultados recientes mas generales sobre la independencia de la condición de frontera para la densidad integrada de estados [Nakumara, 2001]. En general se garantiza la existencia de N^X, para los operadores elípticos de segundo orden con un potencial localmente acotado a través de la *Estimación de Weyl* de la distribución asintótica de los autovalores

$$N^X_\Lambda(E) \leq \frac{\omega_d E^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}},$$

donde ω_d denota el volumen de la bola unitaria de dimensión d. Asi

$$\lim_{\Lambda\to\mathbf{R}^d} \sup N^X_\Lambda(E),$$

siempre existe [Combes y Hislop, 1997].

El caso del laplaciano discreto con condiciones $X = D$

El problema de autovalores para el laplaciano discreto se plantea como:

$$H_{\Lambda}^{D} = \Delta_{d} u := u(n+1) + u(n-1) = \lambda u(n),$$

con

$$\Lambda = [0, j], d = 1 \quad \text{y} \quad X = N : u(0) = u(j) = 0.$$

Sabemos que las soluciones en general son de la forma: $u(n) = Ae^{in\tau} + Be^{-in\tau}$, si reemplazamos dicha solución general en Δ_{d}, obtenemos $\Delta_{d} u(n) = (2\cos\tau) u(n)$, de esta manera

$$\lambda = 2\cos\tau,$$

ahora las condiciones de Dirichlet $X = D$: $u(0) = 0 \Rightarrow A = -B$ y $u(j) = 0 \Rightarrow \sin j\tau = 0$ i.e. $\tau = \frac{k\pi}{j}$. Así los autovalores vienen dados por

$$\lambda_{k} = 2\cos\frac{k\pi}{j} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definamos ahora

$$N_{[0,j]}^{D}(E) := \frac{1}{j+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq j \colon 2\cos\frac{k\pi}{j} \leq E \right\}, \tag{1}$$

y la densidad integrada de estados

$$N^{D} := \lim_{j\to\infty} N_{[0,j]}^{D}(E). \tag{2}$$

Para calcular N^{D}, consideremos primero el caso cuando $-2 \leq E \leq 2$. Consideremos la función arccos $:[-1,1] \to [0,\pi]$ definida como $\arccos(\cos\theta) = \theta \in [0,\pi]$ y la cual es decreciente en $[-1,1]$. Así

$$N_{[0,j]}^{D}(E) := \frac{1}{j+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq j \colon k \geq \frac{j}{\pi} \arccos(E/2) \right\}.$$

Si definimos ahora la función

$$\langle x \rangle := \lfloor x \rfloor - 1,$$

donde $\lfloor x \rfloor$, denota la función "mayor entero menor estrictamente que x" .

Asi (1), se convierte en

$$N_{[0,j]}^{D}(E)=\frac{1}{j+1}\times\left\{j-\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle\right\}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&\left|N_{[0,j]}^{D}(E)-\left(1-\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right)\right| \\
&\quad=\left|\frac{1}{j+1}\times\left\{j-\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle\right\}-\left(1-\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right)\right| \\
&\quad=\left|\frac{1}{j+1}\times j-\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle-(j+1)+\left(\frac{j+1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right| \\
&\quad=\frac{1}{j+1}\times\left|j-\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle-j-1+\left(\frac{j+1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right| \\
&\quad=\frac{1}{j+1}\times\left|-\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle+\left(\frac{j+1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)-1\right| \\
&\quad=\frac{1}{j+1}\times\left|-\left(\left\langle\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rangle+1\right)+\left(\frac{j+1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right| \\
&\quad\leq\frac{1}{j+1}\times\left(\left|-\left\lfloor\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right\rfloor+\left(\frac{j}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right|\right) \\
&\quad<\frac{1}{j+1}\times\left(1+\left|\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right)\right|\right)\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}0,\qquad i.e.\quad \text{por}\quad (2)
\end{aligned}$$

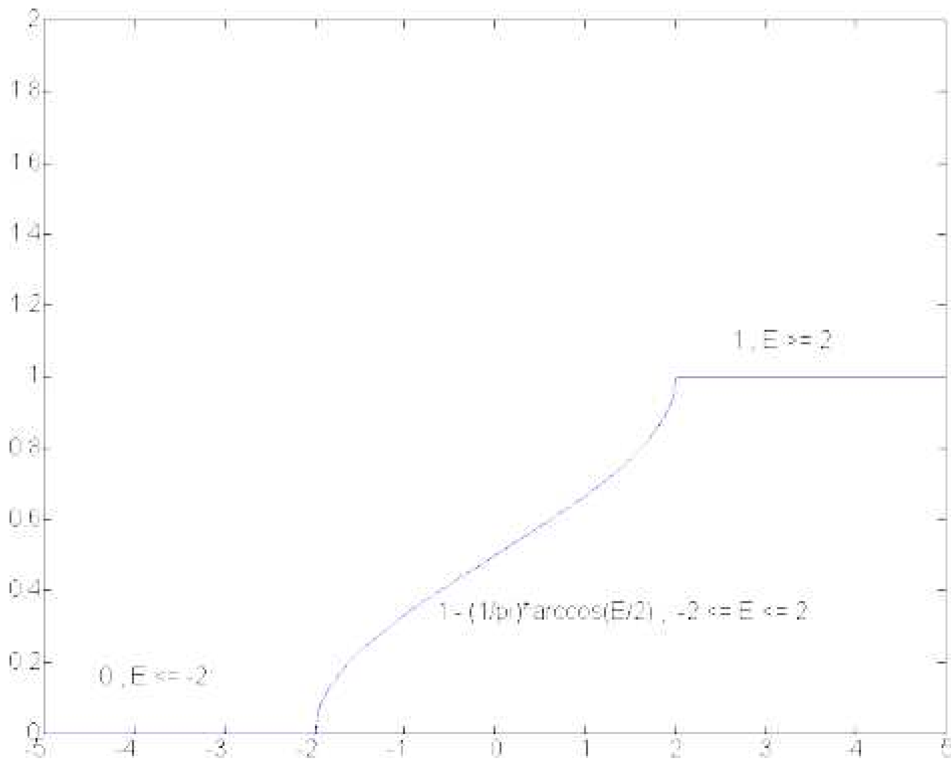
$$N^{D}=1-\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right).$$

Cuando $E>2$, de acuerdo a (1), hay $j+1$ enteros tales $\cos(k\pi/j)\leq 1<E/2$, entonces $N^{D}=(1/j+1)\times(j+1)=1$.

Cuando $E<-2$, de acuerdo a (1), buscamos el números de enteros k, tales $0\leq k\leq j$ y $\cos(k\pi/j)<E/2<-1$, pero evidentemente no existe ninguno, así $N^{D}=(1/j+1)\times 0=0$. ■

Resumiendo, hemos obtenido la siguiente expresión para N^{D}, para E en toda la recta,

$$N^{D}=\begin{cases}0 & \text{si } E<-2,\\ 1-\left(\frac{1}{\pi}\right)\operatorname{arccos}\left(\frac{E}{2}\right) & \text{si } -2\leq E\leq 2,\\ 1 & \text{si } E>2.\end{cases}$$ ■



Nota: un resultado sorprendente de la gráfica de N^D, es su continuidad (figura 1). En realidad, existe un resultado fundamental que asegura que la densidad integrada de estados es continua para cualquier matriz estocástica en el caso unidimensional [Pastur, 1983]. La continuidad en las esquinas de la banda espectral: $E = -2$ y $E = 2$ se sigue del llamado *desarrollo o colas de Lifshitz* [Kirsch, 1988].

Agradecimientos

Los autores agradecen las correcciones y comentarios del árbitro, las cuales fueron fundamentales para la publicación de este artículo. También agradecen a la M. en C. Rosa Margarita Álvarez, la elaboración de la gráfica en *Matlab*.

Este trabajo se hizo gracias al apoyo de la Cátedra Patrimonial SEP–CONACyT, Nivel II, Ref. SC-980004, que hizo posible estancia de colaboración del autor, con el grupo de profesores de la Licenciatura Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ingeniería de la UAQ.

Referencias

[1] Carmona, R., y J. Lacroix, "Spectral Theory of Random Schrödinger Operators", *Probability and its Applications*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] Combes J. M., y P. D. Hislop, *Notes: Localization Properties of Random Media*, Départment de Mathematiques, Université de Toulon et du Var, 83130 La Garde France, Mathematics Department, University of Kentucky, Lexington, KY 40506-0027, EUA, 1997

[3] Cycon H. L., R. G. Froese, W. Kirsch y B. Simon, *Schrödinger Operators with Applications to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín-Heidelberg, 1987.

[4] Kirsch, W., *Random Schrödinger Operators. A Course*, Institute for Mathematics, Ruhr-Universität, D4630 Bochum, West Germany, 1988.

[5] Nakumara, S., "A Remark on the Dirichlet-Newmann Decoupling and the Integrate Density of State", *Journal Functional Analysis* **179**, 1 (2001) pp. 136–152.

[6] Pastur, L., "Spectral Properties of Disordered Systems in One-Body Aproximation", *Comm. Math. Phys.* **89** (1983) pp. 227.