Respuesta a los problemas del artículo *Introducción a las funciones multiplicativas. Primera parte: Funciones aritméticas*, de J. Rangel Mondragón, del número anterior

Problema 1. Sean $f, g \in M$ y $(n, m) = 1$.

$$\begin{aligned}(fg)(nm) &= (f(nm))(g(nm)) = (f(n)f(m))(g(n)g(m))\\ &= (f(n)g(n))(f(m)g(m)) = (fg(n))(fg(m)).\end{aligned}$$

Problema 2. Si $(n, m) = 1$ y $k^2|nm$, entonces $p^2|nm$ para algún primo p, es decir $p|n$ (digamos) y no divide a m. Entonces $p^2|n$. Es decir, $f(nm) = 0$ si y sólo si $f(n) = 0$ o $f(m) = 0$.

Problema 3. Por definición $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} d$. Como $f(d) = d$ es multiplicativa, se sigue que σ también lo es.

Problema 4. Sea $(n, m) = 1$. Como no hay primos comunes en las factorizaciones de n y m entonces el número de primos distintos en la factorización de nm será igual a la suma del número correspondiente a cada una de dichas factorizaciones, lo que es igual a la suma de los exponentes correspondientes en la función f.

Problema 5.

$$\varphi(n) = \prod_{\substack{p|n\\ p \text{ primo}}} \varphi\left(p^{\alpha_i}\right) = \prod_{\substack{p|n\\ p \text{ primo}}} p^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{\substack{p|n\\ p \text{ primo}}} p^{\alpha_i} \prod_{\substack{p|n\\ p \text{ primo}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Problema 6. La demostración consiste de dos pasos:

i. Demostremos primero que cada par (c, d) donde $c|d$ y $d|n$ es tal que $d = ci$ donde $i|n/c$.
Demostración. $c|d \quad \Rightarrow \quad d = ci$ para alguna i. Como $d|n$, $\exists j \ni n = dj = dci \quad \Rightarrow \quad n/c = di \quad \Rightarrow \quad i|n/c$. ∎

ii. Demostremos que cada par (c, ci) donde $c|n$ e $i|n/c$ es tal que $ci|n$.
Demostración. $i|n/c \quad \Rightarrow \quad \exists j \ni n/c = ij \quad \Rightarrow \quad n = cij \quad \Rightarrow \quad ci|n$. ∎

Estas dos demostraciones permiten concluir que los conjuntos de parejas de argumentos de la función f que aparecen en ambos miembros de la ecuación dada son idénticos.