Historia de las matemáticas: algunos ejemplos de magia numérica extraídos de viejos libros

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Zaragoza, España
eana0000@encina.pntic.mec.es

RECIBIDO: *diciembre de 2000*
ACEPTADO: *diciembre de 2000*

RESUMEN

Al estudioso de la historia de las matemáticas, en su trabajo de búsqueda, análisis y valoración de textos, no le resulta extraño encontrar abundante material que cualquier espíritu clasificador incluiría, sin dudar, en la sección de Matemática Recreativa.

En este artículo presentamos algunos juegos matemáticos de adivinación, cuyo interés didáctico es notable, extraídos de tres manuales españoles escritos allá por los siglos XVI y XVII. Para hacer más cómoda la lectura de los textos originales se ha respetado su vocabulario y sintaxis, pero hemos actualizado su ortografía.

Adivinar el número que uno ha pensado

Primera recreación (Corachán[1], 1699)

Algunos suelen poner regla para adivinar los dineros que uno tiene, las horas a que ha comido, o se ha acostado, &c. [etcétera] pero lo mismo es que adivinar el número que ha pensado.

Hágase pues, que el número pensado se tresdoble [se triplique]. Y después de tresdoblado, se preguntará si el triplo es par o impar. Si respondieren que par,

[1]Juan Bautista Corachán fue matemático, físico y astrónomo valenciano, nacido en Valencia en 1661. Falleció en la misma ciudad en 1741.

dígase que tomen la mitad, pero si fuere impar, hágase que se añada 1 y que se tome la mitad. Hecho esto, dígase que se triplique esta mitad, y del triplo que se quiten los nueves que se puedan [tómese el cociente entero de dividir por 9 el último número obtenido] y que digan cuantos nueves han quitado. Sabidos los nueves, tómese 2 por cada uno [multiplíquese por 2 el número de nueves sacados]; tómese también una unidad cuando el primer triplo es impar, y saldrá el número pensado.

Comentario. Dado que el número pensado puede ser par o impar, el procedimiento de Corachán se puede descomponer en los dos siguientes:

1. El número pensado es par ($p = 2a$)
— Multiplicar por 3 el número pensado. Se obtiene $6a$ (par).
— Dividir por 2 el resultado anterior. Se obtiene $3a$.
— Multiplicar por 3 el cociente anterior. Se obtiene $9a$.
— Dividir por 9 el producto anterior. Se obtiene a.
— Multiplicar por 2 el cociente anterior. Se obtiene $2a$ (número pensado).

2. El número pensado es impar ($p = 2a + 1$)
— Multiplicar por 3 el número pensado. Se obtiene $6a + 3$ (impar).
— Añadir 1 al resultado anterior. Se obtiene $6a + 4$ (par).
— Dividir por 2 la suma anterior. Se obtiene $3a + 2$.
— Multiplicar por 3 el cociente anterior. Se obtiene $9a + 6$.
— Dividir por 9 el producto anterior. El cociente obtenido es a y el resto 6.
— Multiplicar por 2 el cociente entero de la división anterior. Se obtiene $2a$.
— Añadir 1 al producto anterior. Se obtiene $2a + 1$ (número pensado).

Segunda recreación (Pérez de Moya[2], 1562)

Pongo, por ejemplo, que uno toma once en su memoria.

Para saber los que toma haréis que tresdoble, y serán 33. De estos 33 sáquese la mitad, que son 16 y medio. Este medio haz que lo haga entero, y será todo 17. Tresdoble otra vez este 17, y serán 51. Saquen otra vez la mitad de 51, que son 25 y medio, y por cuanto vino medio, haréis que lo haga entero, y serán 26. Después de esto no se hará más de preguntar cuántos nueves hay en esta postrera mitad, que fue 26, y respondernos han que hay dos nueves.

Pues la regla es que por cada nueve que os respondieren que hay, habéis de tomar cuatro. Y así por los dos nueves que dicen que hay en los veinte y seis, contareis dos cuatros, que son ocho.

[2]Las noticias biográficas de este autor son inciertas. Se sabe que nació en Santiesteban del Puerto (Jaén) poco antes de 1513. Al parecer, enseñó matemáticas en Salamanca y Madrid. Fue canónigo de la catedral de Granada.

Y porque en esta regla dicen dos veces que tresdoblen el número que toma, y otras tantas veces hacen sacar la mitad, por tanto notareis que si la primera vez que mandárades sacar la mitad, hubiere medio, añadiréis uno; y por el que hubiere en la segunda vez, cuando hiciéredes sacar otra vez la mitad, añadiréis dos.

Pues por cuanto en este ejemplo os vino medio en la primera vez, que vale uno, y en la segunda, que vale dos, por tanto juntareis tres, que montan estos medios, con los 8 que tenéis, y serán once.

Y este diréis que es el número que al principio se imaginó.

Comentario. Sea p el número pensado.

Como en esta recreación se divide dos veces entre 2 y luego se multiplica por 4, se pueden presentar las cuatro situaciones siguientes:

$$p = 4a, \tag{1}$$

$$p = 4a + 1, \tag{2}$$

$$p = 4a + 2, \tag{3}$$

$$p = 4a + 3, \tag{4}$$

En consecuencia, el método de adivinación expuesto por Pérez de Moya se puede analizar desde cuatro puntos de vista:

1. El número pensado es de la forma $4a$
— Multiplicar por 3 el número pensado. Se obtiene $12a$ (par).
— Dividir por 2 el producto anterior. Se obtiene $6a$.
— Multiplicar por 3 el cociente anterior. Se obtiene $18a$ (par).
— Dividir por 2 el producto anterior. Se obtiene $9a$.
— Dividir por 9 el resultado anterior. El cociente obtenido es a.
— Multiplicar por 4 el cociente anterior. Se obtiene $4a$ (número pensado).

Notemos que cuando el número pensado es múltiplo de cuatro no aparecen fracciones ni en la primera división por 2 ni en la segunda.

2. El número pensado es de la forma $4a + 1$
— Multiplicar por 3 el número pensado. Se obtiene $12a + 3$ (impar).
— Dividir por 2 el producto anterior. Se obtiene $6a + 3/2$.
— Añadir $1/2$ al resultado anterior. Se obtiene $6a + 2$.
— Multiplicar por 3 la suma anterior. Se obtiene $18a + 6$ (par).
— Dividir por 2 el producto anterior. Se obtiene $9a + 3$.
— Dividir por 9 el resultado anterior. Se obtiene el cociente a.
— Multiplicar por 4 el cociente anterior. Se obtiene $4a$.
— Añadir 1 al producto anterior. Se obtiene $4a + 1$ (número pensado).

En este caso aparece una fracción en la primera división entre 2, pero no en la segunda.

3. El número pensado es de la forma $4a + 2$
   Dejamos al lector el análisis de este caso. Aquí aparece una fracción en la segunda división, pero no en la primera.

4. El número pensado es de la forma $4a + 3$
   El lector puede comprobar que el truco también funciona en esta situación. Aquí aparece una fracción tanto en la primera división como en la segunda.

El juego de las tres prendas

Primera versión (Aurel[3], 1552)

Tres tienen un libro, mocador [pañuelo] y unos guantes. Para saber cuál tiene el libro, mocador o guantes, tendrás esta regla general.

Reparte entre ellos seis piedras, o tantos, de esta manera: el uno tome una, el otro dos, y el otro tres; y no se cuál tiene uno, dos o tres. Y pongo por caso, que el del libro tiene una x, el del mocador una cantidad [y, en lenguaje simbólico moderno], y el de los guantes la resta que son $6Q - 1x - 1q$ [$6 - x - y$].

Ahora pondrás en la mesa, o adonde ellos están, algunas piedras o tantos, y sean al presente 20. El uno ha de tomar tantas piedras como tomó de las seis; el otro, dos veces tantas; y el otro, cuatro veces tantas. Y lo que sobrare de las dichas veinte piedras has de saber tan solamente. Nota, cualquiera que tu querrás podrá tomar las tantas, dos tantas, o cuatro veces tantas piedras, que no hace al caso.

Ahora dirás, pongo por caso, el que tuviere el libro tome tantas piedras de las veinte, como tiene, y tomará una x de piedras. Ahora torna a decir, el que tuviere el mocador, tome dos veces tantas como tiene, y tomará dos cantidades [$2y$]. Ahora dirás, el que tuviere los guantes, tome cuatro veces tantas como tiene, y tomará $24Q - 4x - 4q$ [$24 - 4x - 4y$].

Ahora suma lo que todos tomaron que es una x, dos cantidades [$2y$], $24Q - 4x - 4q$ [$24 - 4x - 4y$], será todo junto $24Q - 3x - 2q$ [$24 - 3x - 2y$].

Ahora pongo por caso, que sobraron tres piedras de las veinte, faltan diez y siete. Estas serán igual a $24Q - 3x - 2q$. Así, sigue la regla y vendrán $7Q - 3x$ igual a dos cantidades [es decir, $24 - 3x - 2y = 17 \Rightarrow 7 - 3x = 2y$]. Parte $Q - x$ por dos cantidades y vendrán $3\frac{1}{2}Q - 1\frac{1}{2}x$. Tanto vale una cantidad [$7 - 3x = 2y \Rightarrow y = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}x$].

[3] De la biografía de Marco Aurel sólo se sabe que era “natural” alemán y que ejerció como maestro de escuela en Valencia. El *Libro Primero de Arithmetica Algebratica* fue el primer libro de álgebra escrito en castellano.

Ahora pondrás la x valga lo que tu querrás, aunque al presente no puede valer más que $3Q$ [3], porque el que más tiene de las seis piedras no tiene más que tres; ni menos una cantidad podrá valer más que $3Q$, por la misma razón.

Pongo por caso, que la una x valga $3Q$, $3\frac{1}{2}Q - 1\frac{1}{2}x$ $[\frac{7}{2} - \frac{3}{2}x]$ valdrán $3\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}$, lo cual es imposible. Pongo la x valga $2Q$ [2], $3\frac{1}{2}Q - 1\frac{1}{2}x$, valdrán $\frac{1}{2}Q$ $[\frac{1}{2}]$; tampoco puede ser, pues no sobra número entero. Pongo la x valga $1Q$ [1], $3\frac{1}{2}Q - 1\frac{1}{2}x$ valdrán $2Q$, tanto valdrá $1q$ $[y]$.

Así dirás, el que tiene 1 piedra de las 6, tiene el libro, porque le has puesto $1x$; el que tiene 2, tiene el mocador, porque tiene $1q$ que vale $2Q$ y el que tiene 3 tiene los guantes.

Comentario. Para adivinar el objeto (libro, pañuelo o guantes) que tiene cada una de las tres personas que intervienen en el juego, el autor alemán se sirve de un procedimiento, en el que hace uso de un simbolismo algebraico bastante sofisticado, que puede resumirse así:

1) De un montón con seis piedras, una de las personas retira 1, otra coge 2, y otra toma 3. Supongamos que la que tiene el libro retira x piedras ($x \in \{1, 2, 3\}$), la que tiene el pañuelo coge y piedras ($y \in \{1, 2, 3\}$) y la que tiene los guantes toma $6 - x - y$ ($6 - x - y \in \{1, 2, 3\}$).
2) Acto seguido, de un montón con *veinte* piedras, la persona que tomó el libro retira x piedras, la que tiene el pañuelo coge $2y$, y la que tiene los guantes toma $4(6 - x - y) = 24 - 4x - 4y$. Por tanto, se han cogido $x + 2y + 24 - 4x - 4y = 24 - 3x - 2y$ piedras del montón.

Se descubre fácilmente que los únicos valores posibles tomados por la expresión $24 - 3x - 2y$ son 11, 12, 13, 15, 16 y 17.

Entonces, conociendo el número de piedras que faltan del montón que contenía *veinte* se puede saber el objeto que tiene cada persona. Para ello basta con resolver en N una ecuación lineal con dos incógnitas.

Aurel lo hace para el caso en que faltan 17 piedras[4]. En esta situación se tiene que:

$$24 - 3x - 2y = 17 \Rightarrow 7 - 3x = 2y \Rightarrow y = \frac{7 - 3x}{2}.$$

Entonces:

$$x = 3 \Rightarrow y = -1 \notin N,$$
$$x = 2 \Rightarrow y = 1/2 \notin N,$$
$$x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

[4]Se descubre fácilmente que los únicos valores posibles tomados por la expresión $24 - 3x - 2y$ son 11, 12, 13, 15, 16 y 17.

Por tanto,

El que retiró *una* de las seis piedras tiene el libro.
El que cogió *dos* de las seis piedras tiene el pañuelo.
El que tomó *tres* de las seis piedras tiene los guantes.

De un modo similar, el lector puede comprobar que el truco también funciona cuando el número de piedras que faltan del montón es 11, 12, 13, 15 o 16.

Segunda versión (Pérez de Moya, 1562)

> ... Pues para hacer esta cuenta habéis de repartir primeramente a las personas estos 3 números siguientes, dos, cinco, siete, dando a la persona que os pareciere el dos, y a otra el cinco, y a otra el siete.
>
> Después, poned por caso, que las piezas que dejáis fueron medio real, y un real y un ducado, y que cada una de estas tres personas, a quien se hayan repartido estos números, tiene una pieza, y no se sabe qué pieza. Quiero decir, que no sabemos cuál de ellas tiene el ducado, o cuál tiene el real, o cuál tiene el medio real.
>
> Pues para saber qué pieza tomó cada persona, comenzareis con la pieza más baja, diciendo: quien tuviere el medio real, doble el número que le di. Después de esto proseguiréis diciendo: quien tuviere el real, que es la pieza mediana, multiplique el número que le di por 14. Y al otro que tuviere el ducado, que es la pieza mayor, multiplique su número por 15.
>
> Hecho esto, diréis que sumen las tres multiplicaciones y restar se han de 210, y lo que dijeren que resta partirlo heis por trece, y lo que a la partición viniere, ha de ser uno de los tres números de aquellos que al principio repartieres. Pues la persona que tuviere el número que a la partición viniere, esa tal tendrá el maravedí, que es la pieza menor, y lo que sobrare en la partición, será otro de los tres números repartidos, y la persona que tuviere este número que sobra, tendrá el real, que es la pieza mediana, y sabidas las dos piezas, el tercero tendrá la otra pieza mayor, que en este ejemplo será el ducado.

COMENTARIO. Para este juego de adivinación se necesitan tres personas y tres objetos (por ejemplo, un lápiz, un bolígrafo y un rotulador). Cada persona toma un objeto en secreto. Para descubrir qué objeto cogió cada persona, el adivino utiliza el siguiente procedimiento:

1. A una de las tres personas le da una tarjeta con el número 2, a otra le entrega una tarjeta con el número 5, y a la tercera le da una tarjeta con el número 7.

2. Invita a que se realicen las operaciones siguientes:

— La persona que tenga el lápiz debe multiplicar por 2 el número de su tarjeta.
— La persona que tenga el bolígrafo debe multiplicar por 14 el número de su tarjeta.
— La persona que tenga el rotulador debe multiplicar por 15 el número de su tarjeta.
— Después de esto, deben sumarse los tres productos anteriores y restar la suma de 210.
— Por último, se debe dividir por 13 la diferencia anterior.

3. El cociente entero de dicha división es el número de la tarjeta de la persona que cogió el lápiz. El resto de dicha división es el número de la tarjeta de la persona que tomó el bolígrafo.

Para justificar la validez del procedimiento, se puede razonar del modo siguiente: supongamos que la persona que cogió el lápiz tiene la tarjeta con la variable a, la persona que tomó el bolígrafo tiene la tarjeta con la variable b, y la persona que retiró el rotulador tiene la tarjeta con la variable c (notemos que $a+b+c=14$). Entonces, los cálculos impuestos por el adivino conducen a la siguiente expresión:

$$\frac{210-(2a+14b+15c)}{13}\,. \tag{5}$$

Ahora bien, dado que $c=14-a-b$, la expresión (5) se convierte en:

$$\frac{210-(2a+14b+210-15a-15b)}{13}=\frac{13a+b}{13}=a+\frac{b}{13},$$

de donde se puede asegurar que el procedimiento utilizado por el adivino es infalible, salvo errores en las operaciones.

El juego de la sortija (Corachán, 1699)

> Si de muchas personas una tomó una sortija y la pone en la mano, dedo y ñudo [falange] que quiere, se puede saber quién la tiene, y en qué mano, dedo y ñudo, por la regla siguiente.
>
> Primeramente, póngase orden entre las personas, determinando cual sea la primera, segunda, &c.
>
> Después se ha de suponer, que la mano derecha es la primera y la izquierda la segunda; póngase también orden en los dedos, que el pulgar sea el primero, el índice el segundo, &c. Ultimamente, determínese el orden de los ñudos, siendo el extremo el primero, el siguiente el segundo, &c.

Esto supuesto, supongo que son 30 personas, de las cuales la vigésima en orden tomó la sortija, y la puso en la mano izquierda, en el dedo anular, que es el cuarto en orden, y en el ñudo segundo.

Dígase que, secretamente, doblen el número de personas hasta la que tiene la sortija, y el duplo es 40. Añadan 5 y que toda la suma, 45, multipliquen por 5. Luego, que al producto 225 añadan el número de la mano en que estuviere la sortija, que es 2 por estar en la mano izquierda, y la suma 227 multipliquen por 10. Y al producto, 2270, añadan el número de los dedos, que es 4, y la suma 2274 multipliquen por 10. Y al producto, 22740, añadan el número del ñudo, que es 2. Ultimamente, dígase que de la última suma, 22742, resten este número 2500, y que enseñen la resta 20242, en la cual los mismos guarismos manifiestan lo que se busca, porque el primero de mano derecha, que es 2, denota que la sortija está en el ñudo segundo; el siguiente guarismo, 4, indica que está en el dedo cuarto; el siguiente, 2, manifiesta la mano izquierda que, como está dicho, es la segunda en orden, y los restantes 20 señalan el número de la persona.

COMENTARIO. El juego de la sortija tiene como objetivo adivinar quién tiene una sortija, en qué mano, en qué dedo y en qué falange. Para ello se asigna un número de orden a cada una de las personas que participan en el juego (1, 2, 3, ...), un número a cada mano (mano derecha = 1, mano izquierda = 2) y un número a cada dedo y falange, tal como se detalla en la siguiente tabla:

	Falange superior	Falange media	Falange inferior
Pulgar (1)	1		2
Índice (2)	1	2	3
Medio (3)	1	2	3
Anular (4)	1	2	3
Meñique (5)	1	2	3

Después de esta codificación, el adivino invita a una de las personas participantes que realice en secreto los siguientes cálculos:

— Multiplicar por 2 el número de orden de la persona que tiene el anillo.
— Sumar 5 al producto anterior.
— Multiplicar por 5 la suma anterior.
— Sumar el número de la mano en que está el la sortija al producto anterior.
— Multiplicar por 10 la suma anterior.
— Añadir a este producto el número del dedo en que está el anillo.
— Multiplicar por 10 la suma anterior.

— Añadir a este producto el número de la falange en la que está la sortija.
— Quitar 2 500 de la suma anterior.

Después de estos cálculos se tiene un número tal que:

— Sus unidades indican la falange en la que está el anillo.
— Sus decenas señalan el dedo en el que está el anillo.
— Sus centenas indican la mano en la que está el anillo.
— Sus millares señalan el número de orden de la persona que tiene el anillo.

La fiabilidad de este procedimiento se apoya en el siguiente razonamiento. Sean:

a el número de orden de la persona que tiene el anillo (dicho número puede contener más de un dígito).
b el número de la mano en la que está el anillo.
c el número del dedo en el que está el anillo.
d el número de la falange en la que está el anillo.

Entonces, las operaciones impuestas por el adivino conducen inevitablemente al resultado siguiente:

$$\begin{aligned}
&[(((2a+5)5+b)\,10+c)\,10+d]-2500\\
&\qquad=[(((10a+25)+b)\,10+c)\,10+d]-2500\\
&\qquad=[(100a+250+10b+c)10+d]-2500\\
&\qquad=1000a+2500+100b+10c+d-2500\\
&\qquad=1000a+100b+10c+d
\end{aligned}$$

que es la forma polinómica, en base 10, del número *abcd*.

Unas pocas palabras para acabar

El material que henos presentado en este artículo fue utilizado con alumnos de segundo curso (especialidad de Educación Primaria) de la Escuela Universitaria del Profesorado de Teruel (España), durante el curso académico 2000–2001, dentro del marco teórico del constructivismo social y en un contexto de resolución de problemas en grupo cooperativo.

La actitud de los alumnos ante este tipo de problemas recreativos fue muy favorable y les permitió profundizar, según sus opiniones, en el sistema de numeración decimal y en la matematización de situaciones problemáticas.

Referencias bibliográficas

Fuentes

[1] Aurel, Marco, *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, J. Mey, Valencia, 1552.
[2] Corachán, Juan Bautista, *Arithmetica demonstrada theorico-practica, para lo mathematico y mercantil*, J. Bordázar, Valencia, 1699.
[3] Pérez de Moya, Juan, *Aritmética Práctica y Especulativa*, M. Gast, Salamanca, 1562.

Literatura secundaria

[4] Meavilla Seguí, V., "Una aproximación al Libro Primero de Arithmetica Algebratica de Marco Aurel", en Filloy, E. y L. Puig (editores), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, Sección Matemática Educativa del CINVESTAV, México, 1993, pp. 65–95.
[5] Rodríguez Vidal, R., *Diálogos de Aritmética Práctica y Especulativa*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, 1987.