Enfoque tensorial del elemento finito

Gabriel Ventura Suárez
Facultad de Ingeniería, UAQ

RECIBIDO: *septiembre de 2000*
SIN ARBITRAJE

RESUMEN

Se definirá el funcional y cómo éste puede provenir de un producto interno, para así relacionarlo con la forma bilineal y llegar a explotar sus propiedades matemáticas siendo la más importante, para este trabajo, la aproximación.

I. Funcional

Un concepto útil que vale la pena ver al principio es el del funcional, radicando su trascendencia en que su solución está dada en aquel punto estacionario que normalmente lo minimiza. Los funcionales se obtienen a partir de principios energéticos, los cuales son muy socorridos en la ingeniería. Por el teorema de Riesz, todo funcional se puede representar por un producto punto, que a su vez es una forma bilineal, y el teorema de Lax-Milgram garantiza la expresión de su mínimo

Partamos de un modelo físico que se puede representar por un operador A, por ejemplo, la ecuación de Poisson unidimensional. Su representación es:

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g, \tag{1}$$

donde k y g son constantes dimensionales. La forma matricial A, con ciertas restricciones en su dominio D_A, se puede escribir como sigue:

$$Au = g. \tag{2}$$

Por otra parte, veamos la siguiente transformación sobre un dominio cualquiera D_A de A:

$$F: D_A \to R,$$

al cual entenderemos propiamente como funcional, para el cual existe el siguiente teorema:

II. Teorema de Riesz

Toda funcional acotada continua tiene la siguiente forma

$$Fu = \langle u, v \rangle, \tag{3}$$

donde u es un único vector que depende de F.

En efecto, si se tiene un espacio de Hilbert H, un conjunto $D_A \subseteq H$ y un operador $A: D_A \to H$, al encontrar $u \in D_A: Au = f$ en H, con A positivo $\langle A, A \rangle \geq 0$ en D_A, $Au = f$ tiene a lo más una solución. Pensemos que tiene dos soluciones,

$$Au_1 = f, \qquad Au_2 = f \quad \Rightarrow \quad A(u_1 - u_2) = 0. \tag{4}$$

Al aplicar (3)

$$\langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle = \langle 0, u_1 - u_2 \rangle = 0;$$

así,

$$u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad H.$$

En resumen, sea

$$F: V \times V \to R, \tag{5}$$

donde el espacio vectorial V tiene un producto interno

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R, \tag{6}$$

entonces existe un único vector $v \in \mathcal{V}$ tal que

$$Fu = \langle u, v \rangle \quad \forall \quad u \in \mathcal{V}.$$

Si Fu es el trabajo virtual (energía interna, etc.) y a este producto interno le llamamos *forma bilineal* $a(u, v)$, tendremos que:

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall \quad v \in H_0(\Omega).$$

010000

III. Forma bilineal y lineal

La forma bilineal satisface:

$$a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v) \tag{7}$$

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w) \tag{8}$$

$\forall u, v, w \in V$ y $\forall \alpha, \beta \in R$.

La forma $f(v)$ es una transformación lineal que representa una forma lineal, es decir,

$$f\colon \mathcal{V} \to R. \tag{9}$$

IV. Aproximación

El siguiente paso es aproximar el espacio V, procediéndose como sigue: encuentre una $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall \quad v_h \in \mathcal{V}_h, \tag{10}$$

donde $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. Esto es, matemáticamente, la técnica del elemento finito.

V. Teorema de Lax-Milgram

Ahora nos falta relacionar estos conceptos con los principios energéticos, los cuales formarán el principio variacional. Esto se hará utilizando el siguiente teorema:

Si tenemos una nueva funcional cuadrática

$$Fu = \langle Au, u\rangle - 2\langle f, u\rangle \tag{11}$$

para el cual el teorema de Lax-Milgram nos dice que:

$$A\colon D_A \to H \quad \text{positivo}, \qquad f \in H$$

y suponiendo que existe una solución:

$$Au_0 = f \in H \quad \text{para} \quad U_0 \in H,$$

dicha funcional cuadrática,

$$Fu = \langle Au, u\rangle - 2\langle f, u\rangle$$

alcanza su mínimo en u_0, es decir,

$$Fu \geq Fu_0 \quad \forall \quad u \in D_A. \tag{12}$$

Este funcional mínimo es el *principio variacional*.

Con base en lo anterior ya podemos interpretar a la matriz de rigidez del análisis estructural tradicional con el principio variacional, en virtud de representar la forma discreta del mismo.

VI. Problema variacional

Teorema. *El problema variacional discreto de un funcional es equivalente al problema matricial siguiente: encuentre un vector $\vec{\alpha} \in \Re^m$ tal que*

$$\underline{K}\vec{\alpha} = \vec{f}, \tag{13}$$

donde $\vec{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]^T$, $\underline{K}$ es la matriz de rigidez, $\vec{\alpha}$ el vector de desplazamiento y $\vec{f}$ el vector de fuerza. Además,

$$K_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \tag{14}$$

representa el ij-ésimo elemento de la matriz, y

$$f_i = f(\varphi_i)$$

es el i-ésimo elemento del vector $\vec{f}$.

Efectivamente,

$$\begin{aligned} a(\varphi_m, \varphi_n) &= a\left(\alpha_j \varphi_j(x), \beta_k \varphi_k(x)\right) \\ &= \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_k) \beta_k. \end{aligned} \tag{15}$$

Como por (14):

$$K_{kj} = a\left(\varphi_j(x), \varphi_k(x)\right);$$

así, por (15),

$$\alpha_j a(\varphi_j, \varphi_k)\beta_k = \varphi_j K_{kj} \beta_k; \tag{16}$$

esto es,

$$[K\vec{\alpha}]_k \, \beta_k. \tag{17}$$

Además

$$f(\alpha_h) = f\left(\beta_i \varphi_j(x)\right) = \beta_j f(\varphi_j) = \beta_j f_j; \tag{18}$$

en general

$$\beta_j f_j = \vec{\beta} \cdot \vec{f}. \tag{19}$$

Como $\vec{\alpha} \in \Re^m$,

$$\underline{K}\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{f} \cdot \vec{\beta} \qquad \forall \vec{\beta}$$

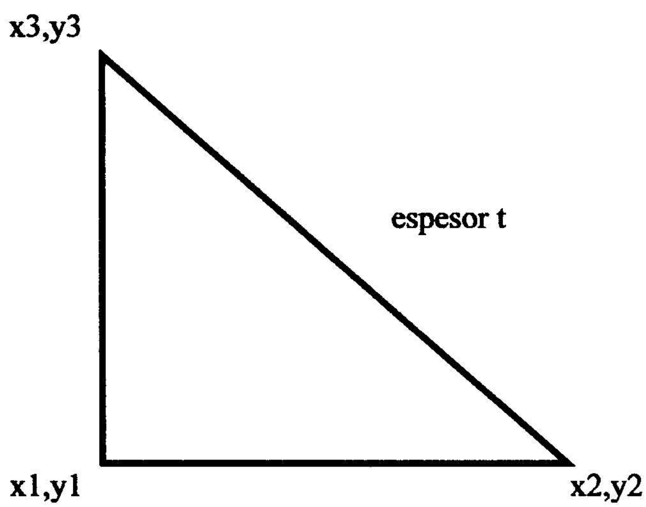
y, por cumplirse para cualquier $\vec{\beta}$ queda:

$$\underline{K}\vec{\alpha} = \vec{f}. \tag{20}$$

Así, la matriz de rigidez es la discretización del problema variacional, representada en forma matricial, generada por una forma bilineal; usemos lo anterior en el siguiente modelo bidimensional:

VII. Obtención tensorial de un problema bidimensional

Dado el siguiente modelo:



la función de forma corresponde al siguiente polinomio (como se puede consultar en el anexo, para el caso bidimensional):

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ w &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \end{aligned} \tag{21}$$

Numerando los nodos del 1 al 3, las funciones de forma N corresponderán a:

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2\text{ área}}\, a_i + b_i x + c_i y, \tag{22}$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i &= y_j - y_k, \\ c_i &= x_k - x_j, \end{aligned}$$

con: S_{ij} el elemento i,j del tensor de esfuerzos, E_{ij} el elemento i,j del tensor de deformaciones, E el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson, x_i, y_i las coordenadas del nodo i-ésimo, t el espesor del elemento,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$E_{ij} = \begin{cases} u_{i,j} & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Para las a, b, c los subíndices se operan cíclicamente:

$$i \to j \to k.$$

Si analizamos el estado de deformación plana:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S} &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \\ \underset{\sim}{E} &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

En este caso, la forma bilineal será el doble de la energía interna:

$$\int \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial V = t \int \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial A. \tag{24}$$

010100

Como

$$\underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E} = \text{traza}\, \underline{S}^{\perp} \underline{E}$$

$$= \text{traza} \left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tag{25}$$

$$= S_{11}E_{11} + S_{21}E_{21} + S_{12}E_{12} + S_{22}E_{22},$$

con

$$S_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[E_{ij} + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} (E_{11} + E_{22}) \right], \tag{26}$$

$$\begin{aligned} a(u,w) = t \int \Big(& \frac{E}{1+\nu} \left[w_{1,1} + \frac{\nu}{1-2\nu} (w_{1,1} + w_{2,2}) \right] u_{1,1} \\ & + 2 \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (w_{1,2} + w_{2,1}) \right] \frac{1}{2} (u_{2,1} + u_{1,2}) && (26) \\ & + \frac{E}{1+\nu} \left[w_{2,2} + \frac{\nu}{1-2\nu} (w_{1,1} + w_{2,2}) \right] u_{2,2} \Big) \partial A && (27) \end{aligned}$$

La matriz de rigidez en forma simbólica es:

$$K_{mj} = \begin{bmatrix} a\left(\varphi_m(N_m,0), \varphi_j(N_m,0)\right) & a\left(\varphi_m(N_m,0), \varphi_j(0,N_j)\right) \\ a\left(\varphi_m(0,N_j), \varphi_j(N_m,0)\right) & a\left(\varphi_m(0,N_j), \varphi_j(0,N_j)\right) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

donde:

$$\begin{aligned} a\left(\varphi_m(N_m,0), \varphi_j(N_m,0)\right) &= t \int \left(\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{(1-\nu)}{1-2\nu} (w_{1,1}u_{1,1}) + \frac{1}{2}(w_{1,2}u_{1,2}) \right] \right) \partial A \\ &= \frac{t}{4\text{ área}} d_1 b_m b_j + d_2 c_m c_j \\ a\left(\varphi_m(N_m,0), \varphi_j(0,N_j)\right) &= t \int \left(\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} w_{1,2}u_{2,1} + \frac{\nu}{1-2\nu} w_{1,1}u_{2,2} \right] \right) \partial A \\ &= \frac{t}{4\text{ área}} d_2 c_m b_j + d_3 b_m c_j \\ a\left(\varphi_m(0,N_j), \varphi_j(N_m,0)\right) &= t \int \left(\frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} w_{2,1}u_{1,2} + \frac{\nu}{1-2\nu} w_{2,2}u_{1,1} \right] \right) \partial A \\ &= \frac{t}{4\text{ área}} d_2 b_m c_j + d_3 c_m b_j \end{aligned}$$

$$a\left(\varphi_m(0,N_j),\varphi_j(0,N_j)\right) = t\int\left(\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}(w_{2,2}u_{2,2}) + \frac{1}{2}(w_{2,1}u_{2,1})\right]\right)\partial A$$
$$= \frac{t}{4\ \text{área}}\, d_1c_mc_j + d_2b_mb_j$$

Así, la matriz de rigidez será:

$$K_{mj} = \frac{t}{4\ \text{área}}\begin{bmatrix} d_1b_mb_j + d_2c_mc_j & d_2c_mb_j + d_3b_mc_j \\ d_2b_mc_j + d_3c_mb_j & d_1c_mc_j + d_2b_mb_j \end{bmatrix}, \tag{29}$$

con

$$d_1 = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{(1-\nu)}{1-2\nu},$$
$$d_2 = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\nu},$$
$$d_3 = \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\nu}{1-2\nu}.$$

VIII. Interpretación del ensamblaje

Hasta aquí ya encontramos la forma tensorial de la matriz de rigidez, restándonos interpretar el ensamblaje. Tomemos un problema elástico lineal donde:

$$a(u,v) = \int \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial V; \tag{30}$$

$\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{E}$ son los tensores de esfuerzo y deformación.

Como la forma bilineal proviene de una integral, esta se puede particionar:

$$a(u,v) = \int_{\Omega_1} \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial\Omega_2 + \cdots + \int_{\Omega_n} \underset{\sim}{S} \circ \underset{\sim}{E}\ \partial\Omega_n, \tag{31}$$

teniendo entonces n problemas que resolver, es decir, encontrar $u_{h_1} \in \mathcal{V}_{h_1}$,

$u_{h_2} \in \mathcal{V}_{h_2}$ y $u_{h_3} \in \mathcal{V}_{h_3}$ tales que:

$$\begin{aligned}
a(u_{h_1}, v_{h_1}) &= f(v_{h_1}) \quad \forall v_{h_1} \in \mathcal{V}_{h_1},\\
a(u_{h_2}, v_{h_2}) &= f(v_{h_2}) \quad \forall v_{h_2} \in \mathcal{V}_{h_2},\\
\vdots \qquad & \quad \vdots\\
a(u_{h_n}, v_{h_n}) &= f(v_{h_n}) \quad \forall v_{h_n} \in \mathcal{V}_{h_n},
\end{aligned} \tag{32}$$

respectivamente.

Entonces el ensamblaje del análisis estructural consiste en dividir a la estructura en n partes no traslapadas, con una matriz de rigidez que tiene las aportaciones de los dominios individuales, para luego resolverla en forma dependiente (acoplada), formando un sistema con dimensión de toda la malla.

Terminamos mostrando algunos modelos que los mismos estudiantes de la licenciatura en ingeniería civil, materia de puentes, han realizado usando el elemento finito.