

# El papel de la curvatura gaussiana en las transiciones orden-caos

Didier Adán Solís Gamboa

Facultad de Matemáticas,  
Universidad Autónoma de Yucatán  
Calle 8 × 21 s/n, Col. María Luisa, C. P. 97199,  
Mérida, Yucatán  
dsolis@prodigy.net.mx

RECIBIDO: *diciembre de 1999*

ACEPTADO: *agosto del 2000*

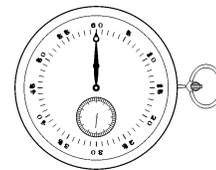
## RESUMEN

En la segunda mitad de este siglo las matemáticas sufrieron un cambio radical. El estudio de los fenómenos no lineales permitió el surgimiento de nuevas disciplinas, las cuáles vinieron acompañadas de una palabra: caos.

Los sistemas que evolucionan con el tiempo reciben el nombre de sistemas dinámicos. Una clase particular de estos sistemas son los sistemas hamiltonianos, que son de gran importancia para las ciencias físicas. La geometría de estos sistemas está íntimamente relacionada con el comportamiento de los mismos. (Alligood *et al*, 1997; Carretero *et al*, 1994; Núñez *et al*, 1990)

El objetivo fundamental del presente trabajo es relacionar un aspecto geométrico específico, la curvatura gaussiana, con los aspectos cualitativos de los sistemas hamiltonianos con 1 ó 2 grados de libertad.

El trabajo está dividido en tres partes. En el apartado I se presentan los conceptos elementales de física, geometría diferencial y sistemas dinámicos que se usarán a lo largo de todo el trabajo. En los apartados II y III se desarrollan los principales resultados que relacionan la curvatura gaussiana y los sistemas hamiltonianos de 1 y 2 grados de libertad. Finalmente, en el apartado IV se discuten los resultados desarrollados en los apartados II y III.



## I. PRELIMINARES

En este apartado se presentan definiciones y resultados referentes a la curvatura gaussiana y a los sistemas hamiltonianos en general. También se analiza una clase particular de hamiltonianos que tienen una gran importancia en la física. Para finalizar este apartado, se analizan algunos conceptos básicos en la teoría general de los sistemas dinámicos.

*La curvatura gaussiana*

El concepto de curvatura es el fundamento de la geometría diferencial clásica. La mayor parte de las características geométricas de curvas y superficies se puede expresar en términos de curvaturas.

Consideremos ahora el caso más sencillo, el de una curva  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $P \in \mathcal{C}$  y  $\theta$  el ángulo de inclinación de la recta tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$ . La curvatura  $k$  de  $\mathcal{C}$  en  $P$  se define como la razón de cambio de  $\theta$  por unidad de longitud de arco  $s$ . Es decir:

$$k = \frac{d\theta}{ds}. \quad (1)$$

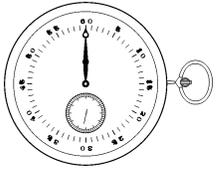
Si la curva  $\mathcal{C}$  es la gráfica de una función suave  $y = f(x)$ , la fórmula de curvatura viene dada por

$$k = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (2)$$

De esta ecuación es claro que  $k$  es positiva cuando  $P$  está sobre un arco cóncavo hacia arriba y negativa cuando está en un arco cóncavo hacia abajo. (Do Carmo, 1976; Guggenheimer, 1977)

Tratemos ahora el caso de una superficie suave  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ . Una superficie suave es aquella en la cual se puede construir el plano tangente a  $S$  en  $P$  (denotado por  $T_P S$ ) para cada  $P \in S$ . El plano tangente en este caso es un espacio vectorial de dimensión dos; por tanto  $T_P S$  es un espacio generado por dos vectores tangentes a  $S$  en  $P$ .

Sea  $r: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva en  $S$  tal que  $r(0) = P$ . Observemos que  $r'(0)$  es un vector tangente a  $S$  en  $P$ . De hecho, si  $r_1$  y  $r_2$  son curvas en  $S$  con  $r_1(0) = P = r_2(0)$ , la relación  $\sim$  dada por  $r_1 \sim r_2$ , si y sólo si el conjunto  $\{r_1'(0), r_2'(0)\}$  es linealmente dependiente, es una relación de equivalencia.



Para poder definir la curvatura gaussiana de una superficie  $S$ , es necesario introducir los conceptos de curvatura normal y curvaturas principales.

**Definición 1.** Sean  $\mathcal{C}$  una curva suave en  $S$  que pasa por  $P \in S$  y  $k$  la curvatura de  $\mathcal{C}$  en  $P$ . La curvatura normal de  $\mathcal{C}$  en  $P$  se define por

$$k_n(\mathcal{C}) = k\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{N}_P, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{n}_P$  es el vector normal a  $\mathcal{C}$  en  $P$  y  $\mathbf{N}_P$  el vector normal a  $S$  en  $P$ .

A continuación citaremos un importante resultado que nos permite calcular las curvaturas normales en  $P$  de todas las curvas en  $S$  que pasan por  $P$ .

**Teorema 1 (Meusnier).** *Todas las curvas en  $S$  que pasan por  $P \in S$  y tienen el mismo vector tangente en  $P$  tienen las mismas curvaturas normales.*

Sea  $\mathbf{v} \in T_P S$ , notemos que la intersección de  $S$  y el plano  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_P \rangle$  es una curva suave en  $S$  que tiene a  $\mathbf{v}$  como vector tangente en  $P$ .

**Definición 2.** Las curvas de la forma  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_P \rangle \cap S$  con  $\mathbf{v} \in T_P S$  reciben el nombre de secciones normales de  $S$  en  $P$ .

El teorema de Meusnier establece que si  $r$  tiene a  $\mathbf{v}$  como vector tangente en  $P$ , entonces  $k_n(\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_P \rangle \cap S)$  es (precisamente) la curvatura normal de  $r$  en  $P$ . (Do Carmo, 1976)

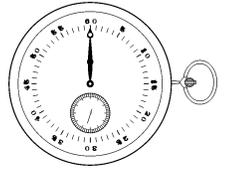
**Definición 3.** Las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de  $S$  en  $P$  se definen como

$$\begin{aligned} k_1 &= \text{máx}\{k_n(\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_P \rangle \cap S) : \mathbf{v} \in T_P S\} \\ k_2 &= \text{mín}\{k_n(\langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_P \rangle \cap S) : \mathbf{v} \in T_P S\}. \end{aligned} \quad (4)$$

**Definición 4.** La curvatura gaussiana  $K$  de  $S$  en  $P$  se define como el producto de las curvaturas principales de  $S$  en  $P$ .

La curvatura gaussiana de una superficie refleja características geométricas importantes de la misma. Mas aún, la curvatura gaussiana permite clasificar los puntos regulares de una superficie.

**Definición 5.** Un punto  $P \in S$  se dice elíptico, hiperbólico o parabólico si  $K(P)$  es positiva, negativa o cero, respectivamente. (Do Carmo, 1976; Guggenheimer, 1977)



Para finalizar, recordaremos que la fórmula de la curvatura gaussiana para una superficie definida por una función suave  $z = U(x, y)$  es

$$K(U) = \frac{U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2}{[1 + (U_{xx})^2 + (U_{yy})^2]^2}. \quad (5)$$

### Sistemas hamiltonianos

**Definición 6.** Un sistema hamiltoniano con  $n$  grados de libertad es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \quad (6)$$

$i = 1, \dots, n$  donde  $H$  es una función  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Las variables  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  reciben el nombre de coordenadas y momentos, respectivamente. La función  $H$  se llama *hamiltoniano* del sistema.

La principal característica de los sistemas hamiltonianos es que las soluciones del sistema yacen en las curvas de nivel de la función hamiltoniana, es decir,  $H$  es una primera integral o constante de movimiento del sistema.

En efecto, consideremos

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0; \quad (7)$$

por tanto  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = c$  es unión de soluciones del sistema. (Arrowsmith y Place, 1992)

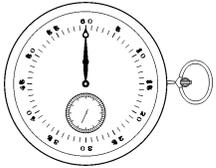
### Algo de física

Uno de los conceptos fundamentales de la física es el llamado Principio de la conservación de la energía. Este conocido principio establece que en cualquier sistema la energía permanece constante.

Consideremos un cuerpo de masa constante  $m$  que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$ . Recordemos que el momento lineal de una partícula viene dado por  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Aplicando el principio de conservación de la energía, obtenemos

$$E = E_c + E_p, \quad (8)$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula,  $E_c$  su energía cinética y  $E_p$  su energía potencial.



La energía potencial  $E_p$  es una función de la posición  $U(\mathbf{x})$  tal que

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (9)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza ejercida sobre la partícula. Por otro lado, la energía cinética viene dada por

$$E_c = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}. \quad (10)$$

De la definición de momento lineal y de la segunda ley de Newton deducimos que  $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ , por tanto

$$-\frac{\partial E}{\partial x_i} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i} = F_i = \dot{p}_i. \quad (11)$$

Además notemos que

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = \frac{\partial E_c}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} = v_i = \dot{x}_i. \quad (12)$$

Finalmente, de (11) y (12) se deduce que  $E$  es un hamiltoniano para el sistema en cuestión.

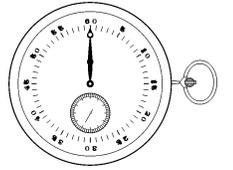
### *Flujos*

La mayoría de los sistemas dinámicos está expresada como sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias. En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales, podemos definir un operador (llamado flujo o evolución) que representa el conjunto de soluciones del sistema.

**Definición 7.** El flujo  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v})$  es un mapeo que a cada pareja ordenada  $(\mathbf{v}, t)$  le asigna el valor de la órbita con condiciones iniciales  $\mathbf{v}$  en el tiempo  $t$ .

Observemos que para  $T$  fijo  $\mathbf{F}_T(\mathbf{v})$  es un mapeo que a cada vector de condiciones iniciales  $\mathbf{v}$  le asigna el estado de la órbita que inicia en  $\mathbf{v}$  en el tiempo  $T$ . A este mapeo se lo conoce como el  $T$ -mapeo asociado al flujo  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v})$ .

Es interesante notar que el 1-mapeo asociado a un flujo es una discretización de la evolución del sistema, ya que iterando este mapeo podemos conocer el estado del sistema en cualquier tiempo  $T \in \mathbb{N}$ . (Alligood *et al*, 1997; Hale y Koçak, 1991)



*Órbitas caóticas*

Una de las características de los sistemas caóticos es la dependencia sensible de condiciones iniciales. Esto significa que dadas dos condiciones iniciales muy próximas  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  y  $N > 0$  existe un tiempo  $T$  finito para el cual

$$d(\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}_t(\mathbf{v}_2)) > N, \quad (13)$$

$\forall t \geq T$ . De hecho, para  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  suficientemente cercanos, se tiene que

$$d(\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}_t(\mathbf{v}_2)) = d(\mathbf{F}_0(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}_0(\mathbf{v}_2)) e^{\lambda t}, \quad (14)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro (denominado exponente de Liapunov) que determina la tasa de divergencia de trayectorias cercanas. (Akhiezer *et al*, 1991)

Para definir el concepto de exponente de Liapunov, consideremos  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $S$  una esfera de radio pequeño centrada en  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^m$ . Después de  $n$  iteraciones de  $\mathbf{f}$  la esfera  $S$  habrá evolucionado en un objeto elipsoidal. La tasa por iteración del crecimiento de  $S$  en las direcciones de sus  $m$  ejes ortogonales son los  $m$  números de Liapunov asociados al mapeo  $\mathbf{f}$ .

**Definición 8.** Sean  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapeo suave,  $U$  la esfera unitaria centrada en  $\mathbf{v}_0$ ,  $J_n = \mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{v}_0)$  y para  $k = 1, \dots, m$  sean  $r_k^n$  las longitudes del  $k$ -ésimo eje ortogonal del elipsoide  $J_n U$  (ordenados de mayor a menor). Así  $r_k^n$  mide la contracción o expansión de puntos cercanos a  $\mathbf{v}_0$  en las primeras  $n$  iteraciones. El  $k$ -ésimo número de Liapunov de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{v}_0$  está dado por

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{1/n} \quad (15)$$

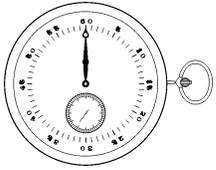
en caso que el límite exista. El  $k$ -ésimo exponente de Liapunov se define como

$$h_k = \ln L_k. \quad (16)$$

En el caso de flujos definimos los números (exponentes) de Liapunov como los números (exponentes) de Liapunov del 1-mapeo asociado al flujo.

Notemos que, si alguno de los ejes de la elipse se expande, un punto  $\mathbf{v}_1$  cercano a  $\mathbf{v}_0$  se separará de  $\mathbf{v}_0$  en la dirección de dicho eje. Así, órbitas inicialmente cercanas se separan a medida que transcurre el tiempo, es decir, habrá dependencia sensible de condiciones iniciales.

Lo anterior sólo sucede si alguno de los números de Liapunov es mayor que 1 o, de manera equivalente, si algún exponente de Liapunov es positivo.



Como habíamos citado anteriormente, la dependencia sensible de condiciones iniciales es una característica de las órbitas caóticas. La definición formal establece otras dos condiciones:

**Definición 9.** Sea  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_0)$  una solución del sistema  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  con  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Decimos que la órbita  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_0)$  es caótica si se cumplen las siguientes condiciones:

- 1)  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_0)$  no está acotada.
- 2)  $\mathbf{F}_t(\mathbf{v}_0)$  tiene al menos un exponente de Liapunov positivo.
- 3)  $\omega(\mathbf{v}_0)$  es no periódico y existe  $\mathbf{v} \in \omega(\mathbf{v}_0)$  tal que  $\mathbf{v}$  no es un punto de equilibrio y no se encuentra en un arco de conexión.<sup>1</sup> (Alligood *et al*, 1997)

## II. EL CRITERIO DE CURVATURA

El primer caso que analizaremos es el de un sistema hamiltoniano de la forma (8) con dos grados de libertad:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + U(x, y). \quad (17)$$

En este caso existe una estrecha relación entre la aparición de caos y la curvatura gaussiana de la superficie potencial  $U(x, y)$ .

Para poder determinar la existencia de órbitas caóticas es necesario calcular los exponentes de Liapunov del sistema. Esto en general no se puede hacer de manera inmediata, ya que para un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v}), \quad (18)$$

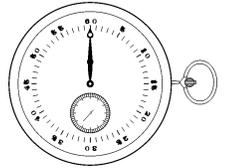
la derivada con respecto a  $\mathbf{v}$  del 1-mapeo asociado al flujo usualmente no se conoce. Una alternativa para el cálculo de los exponentes de Liapunov surge de la llamada *ecuación variacional*, que a continuación deduciremos. (Akhiezer *et al*, 1991; Alligood *et al*, 1997)

A pesar de que no existe una fórmula explícita para la matriz  $D\mathbf{F}_T(\mathbf{v})$ , podemos encontrar una ecuación diferencial que la involucra y que puede resolverse simultáneamente con (18).

Como  $\{\mathbf{F}_t(\mathbf{v}): t \in \mathbb{R}\}$  es solución de (18) con condición inicial  $\mathbf{v}$ , tenemos:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{F}_t(\mathbf{v})); \quad (19)$$

<sup>1</sup> $z \in \omega(\mathbf{v}_0)$  si existe una sucesión creciente no acotada  $\{t_n\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{t_n}(\mathbf{v}_0) = z$ . Un arco de conexión es una solución no constante, tal que sus conjuntos límite sólo contienen equilibrios del sistema.



diferenciando con respecto a  $\mathbf{v}$  y usando la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}\mathbf{F}_t(\mathbf{v}) = \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{F}_t(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}_t(\mathbf{v}); \quad (20)$$

haciendo  $J_t = \mathbf{D}\mathbf{F}_t(\mathbf{v})$ ,  $A(t) = \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{F}_t(\mathbf{v}))$ , deducimos la ecuación variacional:

$$\dot{J}_t = A(t)J_t. \quad (21)$$

Para poder determinar  $J_t$  necesitamos añadir la condición inicial  $J_0 = I$ . Esto es consecuencia de que  $\mathbf{F}_0(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ . (Obsérvese que la ecuación variacional es una ecuación diferencial lineal no autónoma, pues la matriz  $A$  depende del tiempo). (Akhiezer *et al*, 1991; Alligood *et al*, 1997)

Los eigenvalores de  $A(t)$  son usualmente funciones del tiempo. Sustituyendo  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t)$  por  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$ , obtenemos funciones autónomas. Estas funciones evaluadas en las condiciones iniciales son los exponentes de Liapunov del sistema. (Akhiezer *et al*, 1991)

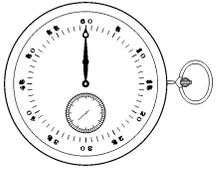
Para un sistema con función hamiltoniana (17), tenemos

$$A(t) = \left( \begin{array}{cccc} H_{xp_x} & H_{yp_x} & H_{p_x p_x} & H_{p_y p_x} \\ H_{xp_y} & H_{yp_y} & H_{p_x p_y} & H_{p_y p_y} \\ -H_{xx} & -H_{yx} & -H_{p_x x} & -H_{p_y x} \\ -H_{xy} & -H_{yy} & -H_{p_x y} & -H_{p_y y} \end{array} \right) \Bigg|_{\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)} \quad (22)$$

$$= \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ -U_{xx} & -U_{yx} & 0 & 0 \\ -U_{xy} & -U_{yy} & 0 & 0 \end{array} \right) \Bigg|_{\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)}$$

Por lo tanto, los exponentes de Liapunov son las soluciones de la ecuación

$$\left| \begin{array}{cccc} -\lambda & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{1}{m} \\ -U_{xx} & -U_{yx} & -\lambda & 0 \\ -U_{xy} & -U_{yy} & 0 & -\lambda \end{array} \right| = 0. \quad (23)$$



Al resolver la ecuación (23), se obtienen los siguientes valores de  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \left( \frac{1}{2m} \left( -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \right) \right)^{1/2},$$

donde  $\beta = \Delta U = U_{xx} + U_{yy}$  y  $\alpha = U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2$ .

En este punto es conveniente hacer dos observaciones:

- 1) Los signos de  $\alpha$  y  $K(U)$  coinciden.
- 2) Si  $\beta \geq 0$  y  $\alpha > 0$ , entonces todos los  $\lambda_i$  son imaginarios.

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de estas dos observaciones:

**Teorema 2 (Criterio de curvatura).** *Sea  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  un sistema de ecuaciones diferenciales con hamiltoniano de la forma (17). Si la función potencial  $U(x, y)$  satisface  $\Delta U \geq 0$  y  $K(U) > 0$  en todo  $\mathbb{R}^2$ , entonces el sistema no tiene órbitas caóticas. (Akhiezer et al, 1991)*

El criterio de curvatura no sólo es útil para establecer la estabilidad de un sistema. Su uso permite determinar el rango de energía que puede tener una órbita estable. (Akhiezer et al, 1991; Núñez et al, 1990; Toda, 1974)

### Ejemplo

Consideremos el potencial de Henon–Heiles<sup>2</sup>

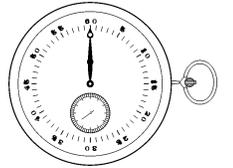
$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (24)$$

Observemos que en este caso

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2, \\ U_{xx}U_{yy} - (U_{xy})^2 &= 1 - 4y^2 - 4x^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Dado que  $\Delta U > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , órbitas estables sólo pueden existir en regiones de curvatura gaussiana positiva. Claramente, la única región de curvatura positiva es la imagen bajo  $U$  del interior del disco de radio  $1/2$  centrado en el origen.

<sup>2</sup>Este potencial es una aproximación de tercer orden al potencial electrostático generado por tres cargas iguales situadas en los vértices de un triángulo equilátero.



Un cálculo directo muestra que en esta región  $U$  alcanza su mínimo en  $(0, 0)$  y su máximo en  $(\pm\sqrt{3}/4, 1/4)$ . Luego en esta región se tiene  $0 \leq U \leq 1/6$ . Por tanto, si una órbita tiene una energía potencial mayor a  $1/6$ , tiene que estar en una región de curvatura negativa y presentar inestabilidad. (Akhiezer *et al*, 1991; Marsden y Tromba, 1991)

### III. UN RESULTADO PARA HAMILTONIANOS CON UN GRADO DE LIBERTAD

En este apartado trataremos la estabilidad local de un sistema hamiltoniano con un grado de libertad y su relación con la curvatura gaussiana de su función hamiltoniana.

Para poder avanzar en este sentido, recurriremos a uno de los principales resultados en el estudio de los sistemas dinámicos, el llamado *Teorema de linealización*.

**Definición 10.** Sean  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  un sistema de ecuaciones diferenciales con  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  y  $\mathbf{v}_0$  un equilibrio del sistema. La linealización de  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  en  $\mathbf{v}_0$  es el sistema  $\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v}$ , donde  $A = (a_{ij})$  es la matriz dada por  $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j |_{\mathbf{v}_0}$ .

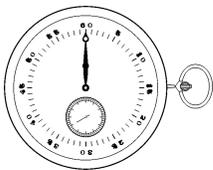
**Definición 11.** Un equilibrio  $\mathbf{v}_0$  del sistema  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  se dice hiperbólico si los eigenvalores de la matriz de linealización tienen parte real no nula.

**Teorema 3 (Grobman–Hartan).** *Sea  $\mathbf{v}_0$  un equilibrio hiperbólico del sistema  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$ . Entonces, en una vecindad de  $\mathbf{v}_0$ , el sistema original y su linealización son cualitativamente equivalentes.*

Cabe señalar que dos sistemas son cualitativamente equivalentes alrededor de un equilibrio si las estructuras de sus respectivas órbitas son iguales. Es decir, en una vecindad de dicho punto los dos sistemas presentan la misma cantidad de órbitas con la misma orientación y el mismo tipo de estabilidad.

El teorema de la linealización afirma pues, que el comportamiento del sistema original se puede deducir a partir de una aproximación lineal si nos hallamos suficientemente cerca de un equilibrio hiperbólico. (Arrowsmith y Place, 1992; Lanczos, 1970)

**Definición 12.** Diremos que un equilibrio  $\mathbf{v}_0$  del sistema  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\mathbf{v})$  es simple si el determinante de la matriz de linealización es no nulo. En consecuencia, la matriz de linealización en un equilibrio simple no tiene eigenvalores nulos.



Con estos recursos ya estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

**Teorema.** *Sea  $(x_0, p_0)$  un equilibrio simple del sistema*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (26)$$

*entonces  $(x_0, p_0)$  es un punto silla si y sólo si  $K(H(x_0, p_0)) < 0$ .*

*Demostración:* Consideremos la linealización del sistema (26) en  $(x_0, p_0)$ . La matriz de linealización

$$A = \left( \begin{array}{cc} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{yx} \end{array} \right) \Big|_{(x_0, p_0)} \quad (27)$$

tiene eigenvalores

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\left(H_{xx}H_{yy} - (H_{xy})^2\right)} \quad (28)$$

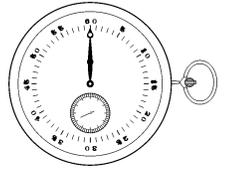
Por otro lado,  $H_{xx}H_{yy} - (H_{xy})^2 = \det A \neq 0$ , ya que  $(x_0, p_0)$  es un equilibrio simple. Además, las únicas opciones para los eigenvalores es que sean imaginarios puros conjugados o reales con distinto signo. Nótese que en el primer caso se tiene un centro<sup>3</sup>, y un punto silla en el segundo. Como la presencia de un centro en la linealización no puede implicar un punto silla en el sistema original, deducimos que  $(x_0, p_0)$  es un punto silla si y sólo si los eigenvalores son reales. Esto, a su vez, sucede si y sólo si  $H_{xx}H_{yy} - (H_{xy})^2 < 0$ . ■

#### IV. CONCLUSIONES FINALES

Hemos visto que existe una estrecha relación entre la curvatura gaussiana negativa y la inestabilidad y el caos en los sistemas hamiltonianos con uno o dos grados de libertad.

El criterio de curvatura nos brinda una condición suficiente para la estabilidad global en sistemas hamiltonianos específicos. El teorema demostrado en el apartado III unifica los conceptos de hiperbolicidad en sistemas dinámicos y geometría diferencial para los hamiltonianos con un grado de libertad.

<sup>3</sup>Un centro es un equilibrio alrededor del cual todas las órbitas son periódicas y concéntricas.



Dado que existen sistemas hamiltonianos que no se pueden expresar de la forma (17), el siguiente paso es caracterizar a los hamiltonianos para los cuales existe una función  $U(\mathbf{x})$  tal que la matriz  $A(t)$  tiene la forma (22). En este sentido, la cuestión inmediata es determinar si tales sistemas pueden expresarse de la forma (17) mediante una transformación simpléctica.<sup>4</sup>

La generalización de estos teoremas a sistemas hamiltonianos con grados de libertad arbitrarios se complica debido a que, en general, las fórmulas explícitas para curvaturas de superficies generales son muy complicadas. Una alternativa interesante consiste en relacionar la curvatura gaussiana con el determinante de la matriz  $A(t)$ , ya que para superficies generales la curvatura gaussiana de  $S$  se define como el determinante de la matriz asociada a la segunda forma fundamental de  $S$ .

## V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado por FOMES, proyecto 97-32-04. El autor desea agradecer a A. Salas, N. Núñez y E. Ávila por su invaluable ayuda en la realización de este proyecto.

Este trabajo esta dedicado a *Aquel* que nos da fuerza y a todas las personas que trabajan incansablemente por un mundo nuevo.

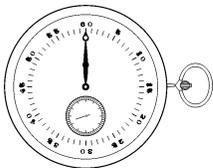
## VI. REFERENCIAS

- [1] Akhiezer, A., *et al*, *Physics Reports* **203** (1991), pp. 289–343.
- [2] Alligood, K., *et al*, *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems*, 1st Ed., Springer-Verlag, 1997.
- [3] Arrowsmith, D., y M. Place, *Dynamical Systems, Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*, 1st Ed., Chapman & Hall, 1992.
- [4] Carretero, R., *et al*, *European Journal of Physics* **15** (1994), pp. 139–148.
- [5] Do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 1st Ed., Prentice Hall, 1976.
- [6] Gartenhaus, S., *Physics: Basic Principles*, Vols. I y II, 1st Ed., Holt, Reinhart & Winston, 1977.
- [7] Guggenheimer, H., *Differential Geometry*, 1st Ed., Dover, 1977.

<sup>4</sup>Una transformación simpléctica es un cambio de coordenadas

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n),$$

donde la función  $\tilde{H}(X_1, \dots, P_n) = H(x_1, \dots, p_n)$  satisface las ecuaciones de Hamilton  $\dot{Q}_n = \partial\tilde{H}/\partial P_n$ ,  $\dot{P}_n = -\partial\tilde{H}/\partial Q_n$ .



- [8] Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, 4th Ed., University of Toronto Press, 1970.
- [9] Hale, J., y H. Kp̄ak, *Dynamics and Bifurcations*, 1th Ed., Texts in Applied Mathematics No. 3, Springer-Verlag, 1991.
- [10] Marsden, J., y A. Tromba, *Cálculo vectorial*, 3a. ed., Addison-Wesley, 1991.
- [11] Núñez, H., *et al*, *Physics Letters A* **145** (1990), pp. 101–105.
- [12] Toda, M., *Physics Letters A* **48A** (1974), pp. 135–136.

