

# Argumentos mecánicos en geometría

Alfinio Flores Peñafiel

Arizona State University  
Tempe, AZ 85287-0911, USA

alfinio@asu.edu

RECIBIDO: *marzo del 2000*

ACEPTADO: *mayo del 2000*

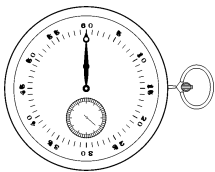
## INTRODUCCIÓN

En este artículo se presentan argumentos de tipo mecánico para probar resultados geométricos. Se utilizan conceptos de física tales como velocidad; composición, resultantes y equilibrio de fuerzas; energía potencial; centro de gravedad; y momento de fuerza. Los ejemplos presentados pueden ser usados para dar a los alumnos de los cursos de física oportunidad de aplicar estos conceptos mecánicos en un campo distinto, y a los alumnos de matemáticas la oportunidad de ver maneras alternativas y altamente intuitivas de demostrar resultados en geometría. Además, para este artículo se utilizó un programa de cómputo de geometría dinámica (Jackiw, 1995) y su complemento para la red mundial (Jackiw, 1998) para elaborar figuras interactivas que se pueden encontrar en el sitio correspondiente de la red (Flores, 2000).

## UN ARGUMENTO DE VELOCIDAD

Sea  $ABC$  un triángulo cualquiera, y el punto  $D$  escogido arbitrariamente (véase la figura 1). Los puntos  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  se construyen de la siguiente manera:  $D_1$  es la reflexión de  $D$  sobre  $B$ ,  $D_2$  es la reflexión de  $D_1$  sobre  $A$ ,  $D_3$  es la reflexión de  $D_2$  sobre  $C$ . ¿Qué se puede decir del punto medio de  $D$  y  $D_3$ ? (Balacheff, 1998).

El lector puede trazar un triángulo, y luego varias figuras, escogiendo  $D$  en diferentes posiciones, y observar que la posición del punto medio  $M$  no



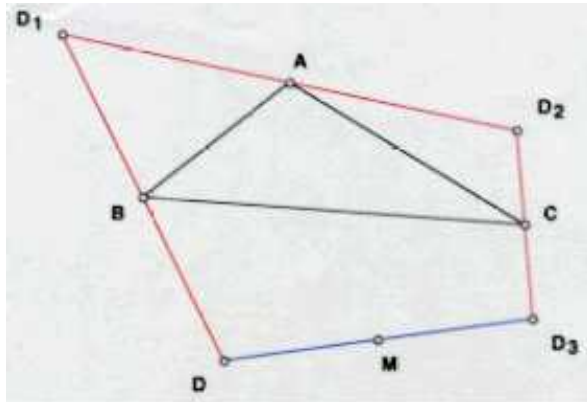
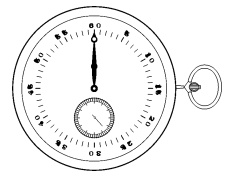


FIGURA 1. El punto medio  $M$ .

depende de la posición inicial del punto  $D$  (o ver la figura interactiva 1). Una forma de convencernos es la siguiente. Si el punto  $D$  se mueve con velocidad  $v$ , el punto  $D_1$  se moverá con una velocidad de igual magnitud pero sentido opuesto  $-v$ , ya que el segmento  $\overline{BD}$  es siempre igual al segmento  $\overline{BD_1}$ , pero los segmentos cambian en direcciones opuestas. Al mismo tiempo,  $D_2$  se mueve de manera contraria con respecto a  $D_1$ , por lo que la velocidad de  $D_2$  es también  $v$ . Al mismo tiempo,  $D_3$  se mueve con velocidad de igual magnitud pero sentido opuesto a la de  $D_2$ , o sea  $-v$ . Si  $D$  se mueve de cierto modo,  $D_3$  se mueve exactamente al contrario (véase la figura 2 ó, bien, la figura interactiva 2). Por tanto, la velocidad del punto medio  $M$ , que es el promedio de las velocidades de  $D$  y  $D_3$ ,  $(-v + v)/2$ , es siempre cero; es decir, el punto  $M$  no se mueve, lo cual significa que es independiente de la posición inicial de  $D$ . Para ver más ejemplos de cómo un resultado de una figura geométrica se puede obtener de considerar la velocidad de los puntos extremos de segmentos en figuras que cambian, utilizando un programa de geometría dinámica, véase Flores (1998).

#### APLICACIÓN DE LA COMPOSICIÓN DE FUERZAS

Kogan (1974) utiliza argumentos basados en la composición de 2 fuerzas a lo largo de los lados de un triángulo para demostrar que ciertas rectas se intersectan en un solo punto. El método se basa en el hecho básico de que si tres fuerzas están en equilibrio, entonces las líneas de acción de estas fuerzas se intersectan en un solo punto. Veamos cómo se utiliza el método para el caso de las bisectrices de los ángulos de un triángulo. Consideremos seis fuerzas de igual magnitud  $F_1, F_2, \dots, F_6$  actuando a lo largo de los lados de un triángulo, como se muestra en la figura 3. Las fuerzas resultantes



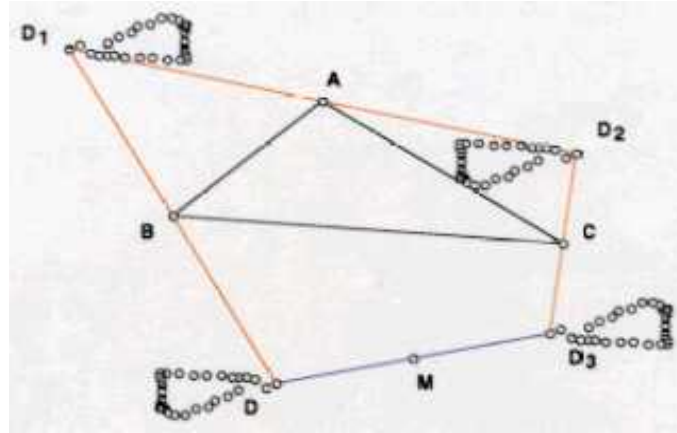


FIGURA 2. Velocidades opuestas.

$R_{16}$ ,  $R_{23}$  y  $R_{45}$  están dirigidas a lo largo de las bisectrices de los ángulos interiores en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , ya que cada paralelogramo es un rombo y la diagonal es la bisectriz del ángulo. Como las fuerzas  $F_i$  ( $0 < i \leq 6$ ) se cancelan mutuamente por pares, están en equilibrio; y, por tanto, las resultantes  $R_{16}$ ,  $R_{23}$  y  $R_{45}$  también están en equilibrio, por lo que las bisectrices de los ángulos se intersectan en un solo punto.

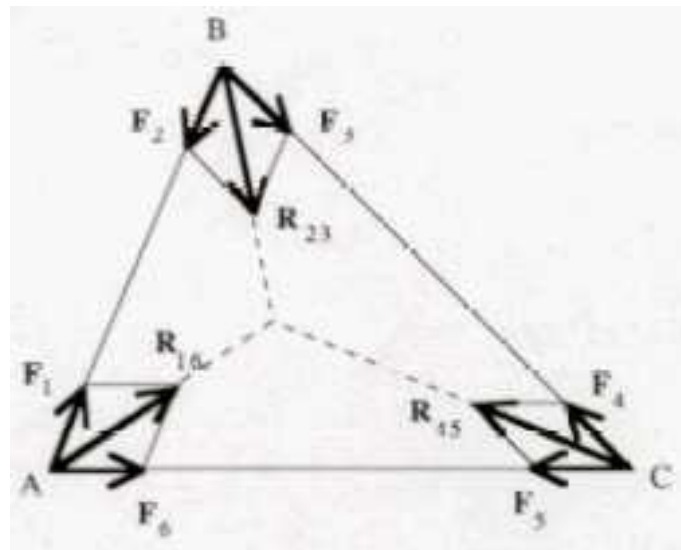
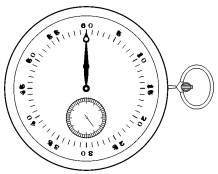


FIGURA 3. Fuerzas en equilibrio.



LA DISTANCIA MÍNIMA A LOS TRES VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO

Se une un punto  $P$  en el interior de un triángulo con los vértices (figura 4 ó, bien, figura interactiva 4). Se busca la posición de  $P$  de modo que la suma de las distancias  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$  sea mínima.

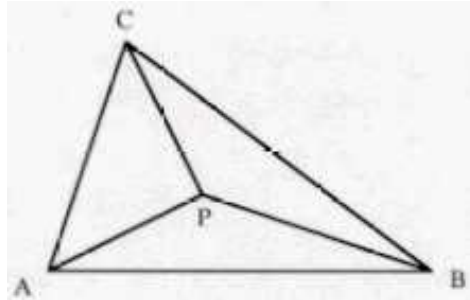


FIGURA 4. Distancias de  $P$  a los vértices.

Una forma de resolver este problema es mediante un argumento mecánico sugerido por de Finetti (1974). Se coloca el triángulo en posición horizontal. Se perforan los vértices del triángulo y se hace pasar un hilo con pesas iguales en cada uno (los hilos se mueven libremente por la perforación). Se atan los hilos entre sí y se obtiene el punto móvil  $P$  (figura 5).

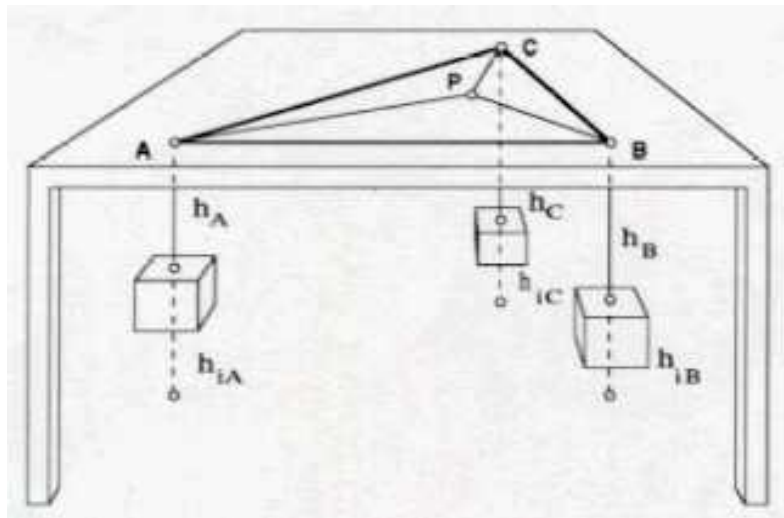
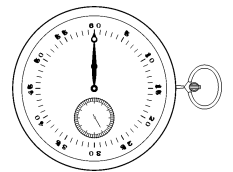


FIGURA 5. Masas iguales.

El sistema de pesas está en equilibrio cuando la energía potencial es mínima. Sea  $h_A$  la distancia desde  $A$  a la masa que cuelga de  $A$ , y  $h_{iA}$  la



distancia de esa masa al suelo. Define de la misma manera  $h_B$ ,  $h_{iB}$ ,  $h_C$  y  $h_{iC}$ . La energía potencial está dada por  $mh_{iA} + mh_{iB} + mh_{iC}$ . Ésta será mínima si  $h_{iA} + h_{iB} + h_{iC}$  es mínima. Esto significa que la suma de las distancias de los vértices a las masas  $h_A + h_B + h_C$  es máxima. Como la longitud total de los hilos es constante, esto implica que  $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$  es un mínimo. Como las tres fuerzas actuando a lo largo de  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$  y  $\overline{CP}$  son iguales, la resultante de dos de ellas está sobre la bisectriz del ángulo entre ellas, y como la resultante equilibra a la tercera fuerza, la línea de acción de ésta es dicha bisectriz. Por tanto cada uno de los segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  y  $\overline{PC}$  está en la bisectriz angular de los dos otros segmentos. De aquí se sigue que cada par de segmentos forma un ángulo de  $120^\circ$  en  $P$  (figura 6). Pólya (1954) utiliza el mismo tipo de argumento mecánico, pero con el triángulo en posición vertical. Para ver otros resultados geométricos que se pueden obtener a partir de considerar diferentes masas asignadas a elementos de triángulos véase Flores Peñafiel (1998).

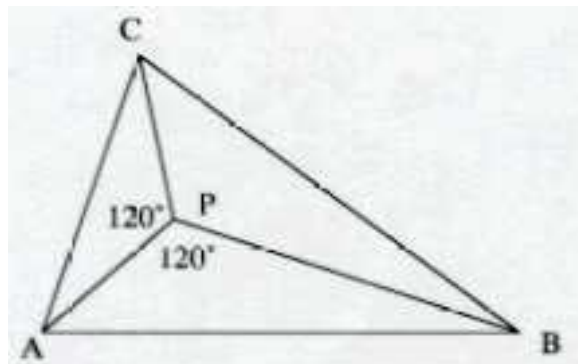
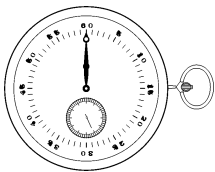


FIGURA 6. La suma de las distancias es mínima.

#### SUMA DE ÁREAS TRIANGULARES EN UN RECTÁNGULO

Alrededor de un triángulo equilátero  $ABC$  se circunscribe un rectángulo en cualquier dirección (figura 7 ó, bien, figura interactiva 7). En general, cada lado de  $\triangle ABC$  corta un triángulo rectángulo del rectángulo. Demostrar que la suma de las dos áreas de los triángulos más chicos es igual al área del triángulo rectángulo más grande.

La siguiente solución fue encontrada por la señora Dijkstra cuando tenía más de ochenta años (Honsberger, 1985). Se gira el triángulo  $CPA$  60 grados alrededor de  $C$  de modo que  $\overline{CA}$  coincida con  $\overline{CB}$ . Se gira el triángulo  $BQA$  60 grados (en la dirección contraria) alrededor de  $B$  de modo que  $\overline{AB}$  coincida con  $\overline{CB}$  (véanse las figuras 8a y 8b).



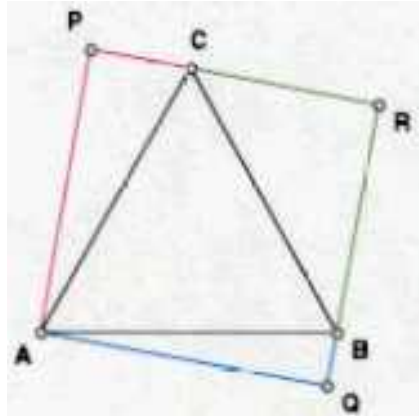


FIGURA 7. Suma de áreas triangulares.

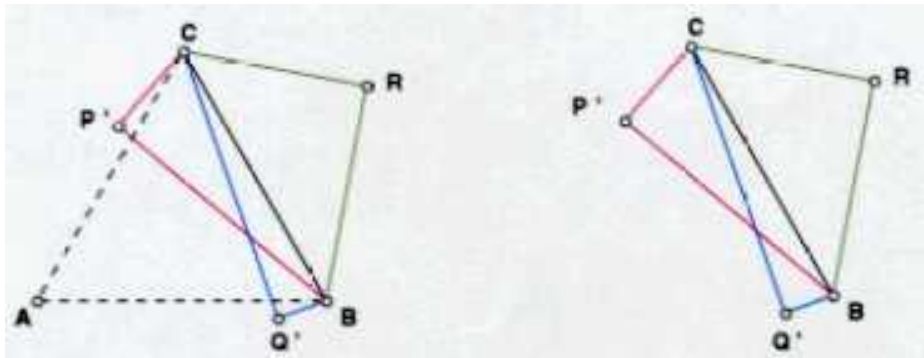


FIGURA 8a

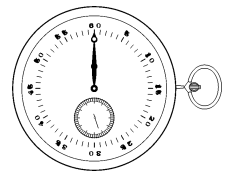
FIGURA 8b

Como los ángulos en  $P'$ ,  $Q'$  y  $R$  son rectos, el círculo con diámetro  $CB$  pasará por los tres puntos (figura 9a). El ángulo  $CRP'$  mide  $120^\circ$  (¿por qué?) e igualmente el ángulo  $RBQ'$  mide  $120^\circ$ . Por tanto, los puntos  $R$ ,  $P'$  y  $Q'$  son los vértices de un triángulo equilátero (figura 9b).

Si suspendemos masas iguales en cada uno de los puntos  $R$ ,  $P'$  y  $Q'$ , el sistema tiene su centro de gravedad en el centro  $O$  del círculo. Como  $O$  está en  $\overline{CB}$ , el sistema está por tanto balanceado con respecto al diámetro  $CB$ . Por lo tanto los momentos de fuerza alrededor de  $\overline{CB}$  determinados por las masas en  $P'$  y  $Q'$  deben ser equilibrados por el momento de la masa suspendida en  $R$  (figura 10a).

La suma de las alturas de los triángulos  $CP'B$  y  $CQ'B$  es igual a la altura del triángulo  $CRB$  (figura 10b). Por lo tanto, la suma de las áreas de los dos triángulos chicos es igual al área del triángulo grande.

Dijkstra utiliza para el caso particular del triángulo equilátero un prin-



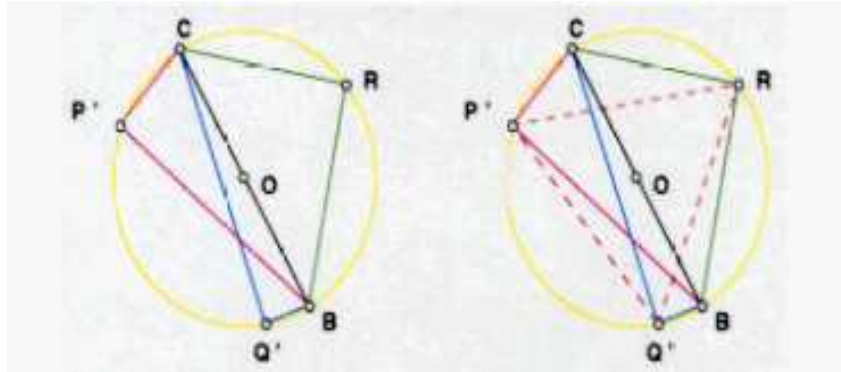


FIGURA 9a

FIGURA 9b

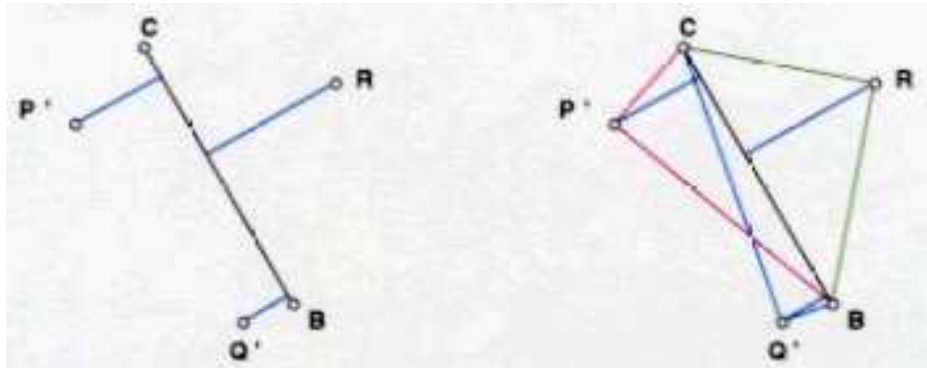
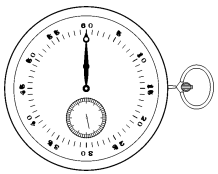


FIGURA 10a

FIGURA 10b

cipio que podemos enunciar de la siguiente manera. Sea  $ABC$  un triángulo arbitrario. Sea  $G$  el punto de intersección de las medianas. Sea  $l$  una línea arbitraria a través de  $G$  (figura 11 ó, bien, figura interactiva 11). Entonces la suma de las dos distancias más cortas de los vértices a la línea es igual a la otra distancia. Para convencernos de esto, podemos usar el mismo argumento de Dijkstra. Imagina el triángulo rígido pero sin masa en posición horizontal. Coloca masas iguales en cada vértice. El centro de gravedad del sistema es  $G$ ; por lo tanto, el sistema se equilibra si se sostiene en  $G$  o si se sostiene a lo largo de la línea que pasa por  $G$ . Así, la suma de los momentos de un lado de la línea es igual al momento del otro lado, por lo que  $md_1 + md_2 = md_3$ . Por lo tanto,  $d_1 + d_2 = d_3$ .



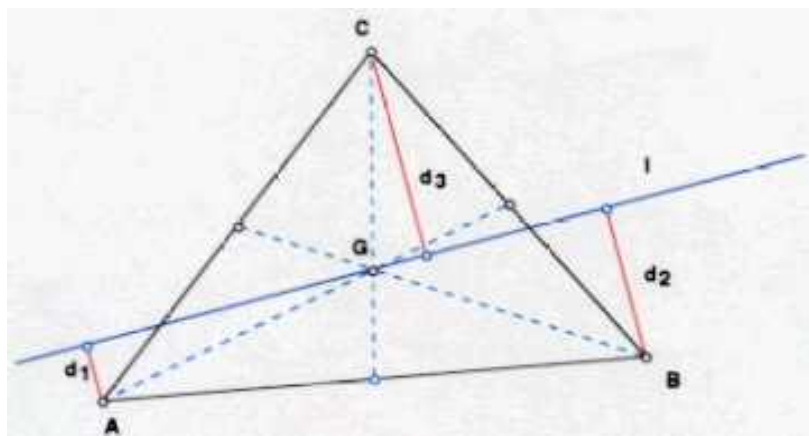


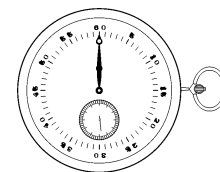
FIGURA 11. Distancias a una línea.

### CONCLUSIÓN

Los alumnos frecuentemente utilizan la matemática y en particular la geometría para resolver y demostrar problemas en física. Como se vio en este artículo, el servicio puede ser mutuo entre la física y las matemáticas. La interacción entre la mecánica y la geometría en los dos sentidos enriquecerá sin duda el aprendizaje de los alumnos en las dos áreas.

### REFERENCIAS

- [1] Balacheff, N., “Learning Mathematics as Modelling,” ponencia presentada en *Technology and Standards 2000 Conference*, Washington, D. C. (June, 1998).
- [2] De Finetti, B., *Die Kunst des Sehens in der Mathematik*, Basel, Birkhäuser, 1974.
- [3] Flores, A., “The Kinematic Method and the Geometer’s Sketchpad in Geometrical Problems,” *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **3** (1998), pp. 1–12.
- [4] Flores Peñafiel, A., “Razones de peso en geometría,” *Miscelánea Matemática* **27** (diciembre de 1998), pp. 1–14.
- [5] Flores, A., *Argumentos mecánicos en geometría*, 2000. En línea: <http://www.public.asu.edu/~aaafp/argumentosmecan.html>
- [6] Honsberger, Ross, *Mathematical Gems 3*, Mathematical Association of America, 1985.
- [7] Jackiw, Nick, *The Geometer’s Sketchpad 3.0* (programa de cómputo),





- Berkeley, Ca., Key Curriculum Press, 1995.
- [8] Jackiw, Nick, *JavaSketchpad*, 1998. En línea:  
[http://www.keypress.com/sketchpad/java\\_gsp/index.html](http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/index.html)
- [9] Kogan, B. Yu, *The Applications of Mechanics to Geometry*, University of Chicago Press, 1974.
- [10] Pólya, George, *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1954.

