# Respuesta a los problemas de la sección “Problemas relacionados” del artículo *Problemas a la carta*, de A. Flores Peñafiel y N. G. Ramírez, del número anterior

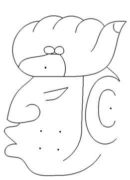
**Problema 1.** *a*) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo con diez lados? Como una diagonal es la línea que une dos vértices que no sean adyacentes, cada vértice puede unirse mediante una diagonal con otros siete vértices; si el polígono tiene diez vértices se tendrán 70 diagonales. Sin embargo, cada diagonal se está contando dos veces: para cada uno de los vértices que une. Por lo tanto, un polígono convexo de diez lados tiene 35 diagonales (convexo significa que las diagonales del polígono están totalmente en el interior del mismo).

Para un polígono convexo de $n$ lados se tienen:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

diagonales; es decir, $n$ vértices por $n-3$ vértices no adyacentes (no se cuenta él mismo ni los dos vértices adyacentes), dividido por 2 (debido a que cada diagonal se “recorre” dos veces).

*b*) En una cena cada una de las personas que están sentadas a la mesa saluda a las personas que están sentadas a su derecha y a su izquierda. Después de la cena cada quien saluda de mano a aquellas personas que no saludó durante la cena. Si había 24 personas, ¿cuántos apretones de manos se intercambiaron después de la cena? La solución de este problema es similar a la solución del problema anterior si cada persona representa a un vértice; los apretones de manos que se intercambian después de la cena representarían las diagonales de un polígono convexo debido a que cada persona saludó a sus vecinos (vértices adyacentes) antes de cenar. Así, si habían 24 comensales, al término del banquete se intercambiaron:



$$\frac{24(24-3)}{2} = \frac{24 \times 21}{2} = 252$$

apretones de manos.

*c*) ¿Cuántos tipos de helados dobles se pueden obtener si la nevería tiene cinco sabores? Se pueden pedir dos bolas del mismo sabor. De nueva cuenta, la combinación *sabor 1–sabor 2* se considera la misma que *sabor 2–sabor 1*. A continuación se muetra una lista de las combinaciones válidas de sabores para un helado doble:

$$5\begin{cases}11\\12\\13\\14\\15\end{cases}, \quad 4\begin{cases}22\\23\\24\\25\end{cases}, \quad 3\begin{cases}33\\34\\35\end{cases}, \quad 2\begin{cases}44\\45\end{cases}, \quad 1\{\,55\,.$$

Se observa una sucesión que va desde el número de sabores disponibles hasta 1 y, además, que el resultado es la suma de estos números. De esta manera el resultado se puede hacer más general para el caso de helados dobles con $n$ sabores si se recuerda que la suma de los primeros $n$ números está dada como:

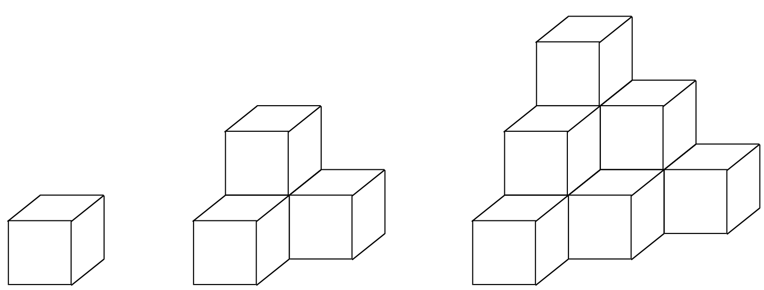
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para el caso de helados triples con $n$ sabores se tendrán:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2}.$$

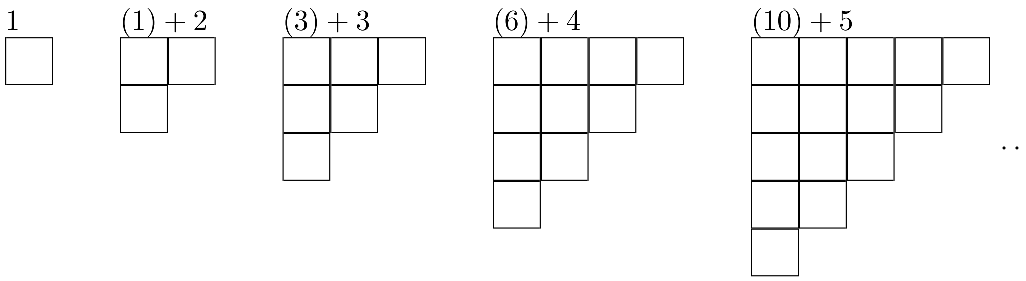
combinaciones válidas.

Éste también es el resultado al problema más complejo ilustrado en la figura 11 del mismo artículo:



primer término 1 cubo — segundo término 4 cubos — tercer término 10 cubos

¿Cuántos cubos tiene el décimo término?




De la figura se deduce que el término $k$ tiene los cubos del término anterior más $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$ cubos. Luego, los cubos del término anterior son $\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{k-1} j(j+1)/2$; entonces el total da $\sum_{j=1}^{k-1} j(j+1)/2 + [k(k+1)/2] = \sum_{j=1}^{k} j(j+1)/2$.

En forma de listado el resultado se obtiene como sigue:

| nivel | número de cubos |
|---|---|
| 1 | $1$ |
| 2 | $1 + \overset{1+2}{3}$ |
| 3 | $1 + 3 + \overset{3+3}{6}$ |
| 4 | $1 + 3 + 6 + \overset{6+4}{10}$ |
| 5 | $1 + 3 + 6 + 10 + \overset{10+5}{15}$ |
| 6 | $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \overset{15+6}{21}$ |
| 7 | $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \overset{21+7}{28}$ |
| 8 | $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \overset{28+8}{36}$ |
| 9 | $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + \overset{36+9}{45}$ |
| 10 | $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + \overset{45+10}{55}$ |

Sumamos y obtenemos que el décimo término tiene 220 cubos.