

Aplicaciones de matemáticas discretas sobre diseños por bloques

J. A. Góngora-Aldaz*

y

G. H. Freeman**

* Universidad Autónoma de Yucatán

* University of Warwick

RECIBIDO: *marzo de 1999*

PUBLICADO: *febrero del 2000*

RESUMEN

Con el propósito de obtener un arreglo para un experimento comparativo secuencial en manzanos un profesional de estadística construyó el primer ejemplo de un diseño por bloques que es conocido hoy día como el *Rectángulo doble de Youden*. Investigaciones subsiguientes sobre rectángulos dobles de Youden se han concentrado mayormente en estudios de existencia y métodos de construcción más que en su enumeración. Se conoce muy poco en los libros de texto de combinatoria y de diseño de experimentos acerca de las aplicaciones de estos arreglos combinatorios tan interesantes. Este artículo tiene como objetivo divulgar aplicaciones de matemáticas discretas sobre diseños por bloques. Se proporciona una metodología sistemática para obtener la enumeración y categorización de: *i*) rectángulos de Youden, y *ii*) rectángulos dobles de Youden de tamaño $p \times (p + 1)$. La técnica es bien ilustrada para valores discretos de p .



1. INTRODUCCIÓN

El primer ejemplo de un Rectángulo Doble de Youden (RDY) —por definir— es atribuido a Clarke [2]. Él lo introdujo en la literatura como un diseño

TABLA 1. Ejemplos de rectángulos dobles de Youden de tamaño 5×6

E1 B2 A3 C4 F5 D1	E5 B2 A3 C4 F1 D5	E2 B3 A4 C1 F5 D1
C3 D4 F1 A5 E2 B3	C3 D4 F5 A1 E2 B3	C4 D5 F2 A3 E1 B4
A4 E3 B5 D2 C1 F4	A4 E3 B1 D2 C5 F4	A5 E4 B1 D2 C3 F3
D5 A1 C2 F3 B4 E5	D1 A5 C2 F3 B4 E1	D3 A1 C5 F4 B2 E5
F2 C5 E4 B1 D3 A2	F2 C1 E4 B5 D3 A2	F1 C2 E3 B5 D4 A2
(a) D_1	(b) D_2	(c) D_3

por bloques para experimentación secuencial en árboles de manzana que sobrevivían un experimento comparativo en un diseño de rectángulo de Youden. En la tabla 1 se presentan ejemplos de RDY de tamaño 5×6 . Bailey [1] introdujo en la literatura la versión combinatoria de RDY y Preece [14] presentó una revisión de la literatura acerca de arreglos de esta clase. La existencia y algunos métodos de construcción de RDY de tamaños $p \times (p+1)$, $p \times (2 \times p + 1)$ y $(p + 1) \times (2 \times p + 1)$ para valores discretos de p son reportados por Preece [14]. Algunos ejemplos de RDY de tamaños 4×5 y 5×6 fueron dados por Christofi [3]. Este último autor se concentra en el objeto combinatorio más que en el diseño por bloque.

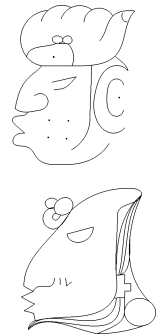
Góngora-Aldaz [7] resalta la importancia de la asignación aleatoria de tratamientos a unidades experimentales con probabilidad uniforme en experimentos comparativos. A pesar de que las pruebas de razón-de-varianzas demandan una selección aleatoria con probabilidad uniforme de entre la colección completa de RDY no parece haberse reportado una enumeración completa de estos diseños por bloques. Este artículo tiene como objetivo divulgar aplicaciones de matemáticas discretas sobre diseños por bloques. Se proporciona una metodología sistemática para obtener la enumeración y categorización de: *i*) rectángulos de Youden, y *ii*) rectángulos dobles de Youden de tamaño $p \times (p + 1)$. La técnica es bien ilustrada mediante la categorización de RDY de tamaño $p \times (p + 1)$ para $p = 4$ y $p = 5$.

Antes de pasar a describir nuestro método de enumeración vamos a introducir la terminología del presente artículo. Conceptos más elementales de teoría de grupos están disponibles en libros de texto tales como el de Durbin [4].

2. DEFINICIONES, NOTACIÓN Y CONCEPTOS PRELIMINARES

Sea T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$ los cuales van a ser comparados, en sus efectos, en un diseño por bloques. Más aún, denotemos por S_t un grupo de permutaciones sobre T . De acuerdo con Durbin [4], “cualquier grupo cuyos elementos son permutaciones, con la composición como operación, es denominado un grupo de permutaciones.”

En lo siguiente denotemos por Δ a un conjunto no vacío.



Definición 1. Una partición de Δ es una colección \mathcal{P} de subconjuntos de Δ que cumplen las siguientes dos propiedades: 1) $\cup_{V \in \mathcal{P}} V = \Delta$, 2) para cualquier $U, V \in \mathcal{P}$, $U \cap V = \emptyset$.

Definición 2. Sea $(G, *)$ un grupo. Se dice que G actúa sobre Δ si y sólo si para cada $g \in G$ y cada $D \in \Delta$ existe un elemento $g \bullet D \in \Delta$ tal que: i) si e denota el elemento identidad en G entonces e fija D , i.e., $e \bullet D = D$, y ii) para todo $g_1, g_2 \in G$ y cada $D \in \Delta$, se cumple que $g_1 \bullet (g_2 \bullet D) = (g_1 * g_2) \bullet D$.

Teorema 1. Sea $(G, *)$ un grupo que actúa sobre Δ . La relación de equivalencia \sim sobre Δ , definida por $D_1 \sim D_2$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g \bullet D_1 = D_2$ induce una partición sobre Δ en clases de equivalencia denominadas órbitas.

Definición 3. Sea $(G, *)$ un grupo que actúa sobre Δ . Para cualquier $D \in \Delta$, el estabilizador de D se define como el conjunto $G_D = \{g \in G: g \bullet D = D\}$.

Para el experto en combinatoria la *diferencia* entre dos estructuras podría ser determinada por el grupo que actúa sobre el conjunto de objetos. En contraste, los profesionales en estadística distinguirían entre ellos de acuerdo a propiedades estadísticas. Vamos entonces a establecer el marco teórico apropiado de tal modo que se satisfagan propiedades combinatorias y estadísticas en la enumeración y categorización de los diseños por bloque presentados aquí.

Definición 4. Sean U, V conjuntos no vacíos. La matriz de ocurrencia para U y V es aquella cuyo elemento (i, j) -ésimo representa el número de unidades en el i -ésimo nivel de U y en el j -ésimo nivel de V .

Definición 5. Una matriz se denomina plana si sus elementos son todos iguales a una constante.

En las definiciones 6 y 7 denotemos por U y V conjuntos no-vacíos. Además, denotemos por n_{UV} a la matriz de ocurrencia para U y V . Lo que es más, sean r_U, r_V vectores columna de replicaciones de cada nivel de U y de V , respectivamente

Definición 6. U se dice ortogonal con respecto a V —denotado $U \perp V$ — si y sólo si

$$n_{UV} = \frac{1}{N} r_U r'_V,$$

donde N es el número total de unidades experimentales.



Definición 7. El conjunto U se dice totalmente balanceado con respecto a V si y sólo si para algunos enteros positivos λ y s ,

$$n_{UV}n'_{UV} = (s - \lambda)I + \lambda J,$$

donde I es la matriz identidad y J es una matriz plana con la unidad como elemento constante.

Definición 8. Sea Ω un conjunto de celdas, T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$ y \mathcal{L} una colección de subconjuntos $\{L_1, L_2, \dots, L_b\}$ —denominados como bloques— de Ω tal que el número de celdas en el subconjunto L_i es k_i , para $i = 1, \dots, b$. Entonces un diseño por bloque (Ω, \mathcal{L}, T) es aquél que resulta de la asignación de tratamientos $t \in T$ a celdas $\omega \in L_i$, para $i = 1, \dots, b$.

En lo que resta de este artículo consideraremos diseños por bloques en los cuales $k_i = k$ para todo valor de i en la definición 8.

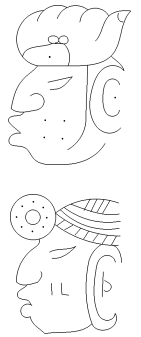
Definición 9. Sean Ω , T y \mathcal{L} como en la definición 8, y (Ω, \mathcal{L}, T) un diseño por bloques. Entonces (Ω, \mathcal{L}, T) se denomina un Diseño por Bloques Incompletos Balanceados (DBIB) $B[k, \lambda, t]$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones: i) falta al menos un elemento $t \in T$ del bloque L_i , para $i = 1, \dots, b$, ii) cada uno de los t tratamientos aparece en r elementos de \mathcal{L} , y iii) cualquier par $t_1, t_2 \in T$ aparece en $\lambda = r \times (k - 1)/(b - 1)$ elementos de \mathcal{L} .

Cuando $t = b$ y $r = k$ entonces DBIB $B[k, \lambda, t]$'s son denominados Diseños Simétricos por Bloques Incompletos Balanceados (DSBIB).

Definición 10. Sea T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$ y Ω un arreglo rectangular de $v \times t$ celdas. Un rectángulo de Youden Y es aquel que resulta de la asignación de tratamientos $t \in T$ a celdas $\omega \in \Omega$ de modo tal que se cumplen las siguientes dos condiciones: i) todos los símbolos de los tratamientos en T aparecen exactamente una vez en cada renglón, y ii) la colección de columnas que resulta en Ω son los bloques de un DSBIB $B[v, \lambda, t]$ con $\lambda = v \times (v - 1)/(t - 1)$.

El lector puede verificar que los arreglos rectangulares en la tabla 1 dados por las letras latinas, ignorando los números, satisfacen la definición 10. Note que los renglones y las columnas representan las restricciones de bloque bajo las cuales se asignaron tratamientos (representados por las letras latinas) a celdas en el arreglo rectangular.

Definición 11. Sea S un conjunto de s símbolos $S = \{1, 2, \dots, s\}$, T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$, $t < s$, Ω un arreglo rectangular de $t \times s$ celdas, y Y un rectángulo de Youden sobre S . Entonces se dice que



un arreglo D superpuesto en Y completa un rectángulo doble de Youden sobre Y si y sólo si éste se obtiene de la asignación de tratamientos $t \in T$ a celdas $\omega \in \Omega$ tal que se cumplen las siguientes dos condiciones: i) cada símbolo $t \in T$ aparece exactamente una vez con cada elemento del conjunto S , y ii) cada renglón contiene n o $n+1$ veces el elemento t para toda $t \in T$, donde $n = [s/t]$ —parte entera de s/t —, y $s - n \times t = 1$ o si para cada $t \in T$ se eliminan n celdas que contengan a t de cada renglón entonces los renglones obtenidos son los bloques de un diseño simétrico por bloques incompletos balanceados.

El lector puede verificar que en un arreglo de rectángulo doble de Youden el conjunto T en la definición 11 satisface las condiciones de ser i) ortogonal con respecto del conjunto S y con respecto del conjunto de columnas, y ii) totalmente balanceado con respecto al conjunto de renglones.

Notación: renglones, columnas y símbolos en un rectángulo de Youden en la definición 11 serán denominados como las *restricciones de bloqueo* del RDY.

Fisher [5], Pearce y Taylor [11], y Freeman [6] recurren a la técnica del análisis de varianza (ANOVA) primariamente para proporcionar una estimación válida del denominado error experimental. En consecuencia, un criterio para distinguir entre RDY para aplicaciones estadísticas debe incorporar la información dada por la técnica antes citada.

Sea S un conjunto de 6 símbolos $S = \{A, B, C, D, E, F\}$, T un conjunto de 5 tratamientos $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Más aún, consideremos el conjunto de RDY que son obtenibles de estos conjuntos, Con el propósito de ilustrar lo que significará diferencia en estructura estadística consideremos el conjunto de datos mostrados en la tabla 2. Al hacer uso de un paquete estadístico de la preferencia del lector es inmediato calcular las tablas del ANOVA para estos datos bajo las restricciones impuestas por los tres RDY presentados en la tabla 1. La *suma de cuadrados de los tratamientos* —redondeada a dos decimales— para el conjunto superpuesto de tratamientos son: a) 9.85, b) 9.85 y c) 0.88 en la tabla 1.

TABLA 2. Conjunto de datos para ilustrar estructura estadística en los RDY

4.62	5.70	5.01	5.99	4.61	5.30
7.00	7.00	4.61	5.01	5.86	5.01
5.52	5.01	4.61	6.21	4.61	6.55
5.01	4.60	4.61	5.70	6.74	5.86
4.60	4.60	6.31	4.61	6.68	5.01

Sea S_5 el grupo de permutación sobre el conjunto de tratamientos T . En la tabla 1, el lector puede ver que el elemento $(15) \in S_5$ es tal que la acción de (15) sobre D_1 produce el RDY D_2 . En general, sea S un conjunto



de s símbolos $S = \{1, 2, \dots, s\}$, T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$, $t < s$, Ω un arreglo rectangular de $t \times s$ celdas, Y un rectángulo de Youden sobre S , y Δ el conjunto de arreglos superpuestos que forman RDY sobre Y . Entonces la acción del grupo de simetrías en T , digamos S_t , sobre Δ , induce una partición de Δ tal que todos los elementos en cada órbita son estadísticamente los mismos, *i.e.*, producen el mismo valor para la estadística de prueba F en la tabla del análisis de varianza. Esto es, dos arreglos superpuestos D_1 , y D_2 sobre Y que satisfacen la definición 11 son estadísticamente diferentes, denotado por $D_1 \not\sim D_2$, si y sólo si no existe elemento $g \in S_t$, tal que $g \bullet D_1 = D_2$.

Ahora que contamos con un criterio para distinguir los arreglos para propósitos de aplicaciones estadísticas vamos a proceder a ilustrar nuestra metodología de categorización mediante unos ejemplos de aplicación sobre datos discretos.

3. METODOLOGÍA

En esta sección se conjuntan propiedades combinatorias y estadísticas con objeto de enumerar y categorizar RDY. Estos arreglos se introdujeron en la literatura estadística para comparar un nuevo conjunto de tratamientos sobre unidades experimentales que aún se encuentran afectadas por un conjunto de tratamientos previos. En otras palabras, el experimento original se efectuó sobre un diseño de rectángulo de Youden y el nuevo conjunto de tratamientos se va a sobreponer al primer arreglo para formar un rectángulo doble de Youden.

La ilustración de la metodología está dividida en dos partes. La primera se refiere a aquellos diseños por bloques para experimentos comparativos bajo dos restricciones de bloqueo denominados rectángulos de Youden. La acción de grupos de simetría sobre el conjunto de rectángulos de Youden conduce a una enumeración completa y categorización de arreglos de esta clase de tamaño $p \times (p+1)$ para $p = 3, 4, 5$. Se señala al lector la existencia de algoritmos de búsqueda hacia atrás (*backtracking algorithms*). La categorización que resulta es usada posteriormente como base para la enumeración y categorización de rectángulos dobles de Youden en la subsección 3.2. Para este último caso utilizamos un algoritmo analizado, diseñado y programado por los que suscriben.

3.1. Enumeración y categorización de rectángulos de Youden

Los rectángulos de Youden son diseños de renglón-y-columna tales como los mostrados en la tabla 3. Estos fueron conocidos inicialmente como cuadrados de Youden en tributo a W. J. Youden [15, 16]. Él parece haber sido el que los introdujo en la literatura como arreglos matemáticos con



aplicación en experimentos comparativos estadísticos. Preece [12] sugirió un nombre más adecuado para estos arreglos rectangulares: *Rectángulos de Youden*. Las ideas de asignación aleatoria equiprobable de tratamientos a unidades experimentales con el propósito de validar pruebas estadísticas comparativas son atribuidas R. A. Fisher [5]. Tales conceptos de aleatorización motivaron a estadísticos a investigar sobre la construcción y enumeración de arreglos combinatorios que se pudieran aplicar a experimentos comparativos estadísticos. Más aún, su uso como la base para construir diseños de rectángulos dobles de Youden ha renovado interés por su enumeración y categorización. El lector interesado en los antecedentes históricos sobre los rectángulos de Youden podría encontrar interesante el trabajo de Preece [13].

TABLA 3. Ejemplos de rectángulos de Youden de tamaño 4×5

1 2 3 4 5	1 5 2 4 3	1 2 3 4 5
2 1 4 5 3	5 1 4 3 2	2 3 4 5 1
3 4 5 1 2	2 4 3 1 5	3 4 5 1 2
4 5 2 3 1	4 3 5 2 1	4 5 1 2 3
(a) Y_1	(b) Y_2	(c) Y_3

Nota: Los renglones y las columnas representan las restricciones de bloqueo bajo las cuales se asignaron tratamientos a las unidades experimentales en el arreglo rectangular. Para especificar el conjunto de tratamientos asignados T , Y es denominado un rectángulo de Youden sobre T .

Gongora-Aldaz [7] explicó en considerable detalle como los estadísticos recurren al ANOVA para los propósitos de: *i*) validar la estimación de la variación residual, y *ii*) estimar medidas de tratamientos en experimentos comparativos estadísticos en diseños de “cuadrado latino”. Para distinguir entre rectángulos de Youden seguimos esa perspectiva aquí. Consideremos el conjunto de datos mostrado en la tabla 4.

TABLA 4. Conjunto de datos en un arreglo de 4×5

3	0	-1	-1	5
1	2	0	6	0
-2	-1	5	4	1
0	7	0	-1	3
(a) Y_1				



El lector puede verificar que la *suma de cuadrados de los tratamientos* para el análisis estadístico de los datos en la tabla 4 bajo las restricciones de los tres rectángulos de Youden mostrados en la tabla 3 son: *a*) 117.6, *b*) 117.6 y *c*) 94.13. Las tablas de ANOVA para estos arreglos pueden ser obtenidas por medio de algún paquete estadístico de la preferencia del lector.

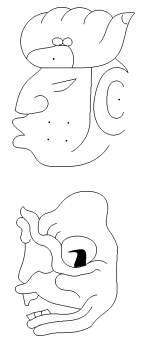
Sea S_5 el grupo de simetrías sobre el conjunto de tratamientos $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Note que en la tabla 3 el elemento $(235) \in S_5$ es tal que $(235) \bullet Y_1 = Y_2$. La acción de S_5 sobre el conjunto de rectángulos de Youden de tamaño 4×5 induce una partición de este conjunto de tal modo que los rectángulos de Youden etiquetados como Y_1 y Y_2 en la tabla 3 pertenecen a la misma órbita. Más aún, esta clasificación también satisface la condición de que todos los elementos en una cierta órbita tienen el mismo valor para *suma de cuadrados de los tratamientos* en la tabla del ANOVA. Es decir, son estadísticamente *invariantes*.

En general, sea T un conjunto de t tratamientos $T = \{1, 2, \dots, t\}$, Ω un arreglo rectangular de $r \times t$ celdas y Λ el conjunto de rectángulos de Youden sobre T . Entonces la acción de S_t sobre Λ induce una partición de Λ de tal modo que todos los elementos en una órbita dada son equivalentes desde el punto de vista estadístico y combinatorio. En otras palabras, los estadísticos dirán que dos rectángulos de Youden Y_1 y Y_2 son estructuralmente equivalentes, denotado por $Y_1 \sim Y_2$, si y sólo si existe un elemento g en S_t tal que $g \bullet Y_1 = Y_2$.

El listado completo de representantes de órbita de rectángulos de Youden de tamaño 3×4 bajo la acción de S_4 , *i.e.*, diseños de rectángulo de Youden estadísticamente diferentes es: 1234 2143 3412, 1234 2143 3421, 1234 2143 4312, 1234 2143 4321, 1234 2341 3412, 1234 2341 4123, 1234 2413 3142, 1234 2413 4321, 1234 3142 2413, 1234 3142 4321, 1234 3412 2143, 1234 3412 2341, 1234 3412 4123, 1234 3412 4321, 1234 3421 2143, 1234 3421 4312, 1234 4123 2341, 1234 4123 3412, 1234 4312 2143, 1234 4312 3421, 1234 4321 2143, 1234 4321 2413, 1234 4321 3142, 1234 4321 3412 —con un orden para los renglones de izquierda a derecha. Un listado completo de rectángulos de Youden de tamaño 4×5 bajo la acción de S , está dado por Gongora-Aldaz y Freeman [8].

Ya que hemos ilustrado mediante ejemplos muy accesibles a la comprensión lo que significa *rectángulos de Youden estadísticamente diferentes*, vamos a proceder a presentar los resultados de nuestra categorización en lo que resta de esta subsección.

Lam y Thiel [10] presentan un algoritmo general de búsqueda hacia atrás (*backtrack search algorithm*) para enumerar objetos combinatorios bajo la acción de grupos de simetría. De las ideas generales discutidas por esos autores Gongora-Aldaz [7] dedujo un algoritmo computacional con objeto de mostrar cómo al incremento de las simetrías en grupos que actúan sobre cuadrados latinos conduce a un método rápido para *categorizar* y enumerar arreglos de este tipo. Por ejemplo, él ilustra como la acción del grupo $S(\mathcal{P})$ —grupo que resulta del producto directo de los grupos de simetría sobre tratamientos asignados, columnas y renglones, respectivamente— sobre el conjunto de cuadrados latinos de tamaño 6 induce una partición de



este último en 22 órbitas [7, sección 3.3.6]. Gongora-Aldaz [7, sección 3.3.3] mostró que estos representan 1 128 960 estructuras diferentes para aplicaciones estadísticas. De manera análoga, denotemos por $S_t \times S_c \times S_r$, o $S(\mathcal{P})$ para simplificar, el producto directo de los grupos de simetría sobre tratamientos asignados, columnas y renglones, de un rectángulo de Youden, respectivamente. Sea Λ el conjunto de rectángulos de Youden de tamaño $p \times (p + 1)$ para $p = 3, 4, 5$. Entonces la acción de $S(\mathcal{P})$ sobre Λ induce la categorización de rectángulos de Youden de estos tamaños como se presenta en la subsección 3.1.1 del presente trabajo.

Se recomienda al lector el algoritmo general de búsqueda hacia atrás (*backtrack search*) de objetos combinatorios bajo la acción de grupos de simetría presentado en [10]. Tal artículo contiene ideas de un método de enumeración y clasificación de objetos combinatorios que podrían ser útiles al estadístico para deducir un algoritmo que genere diseños por bloques para uso en experimentación estadística.

Vamos a mostrar como se generan todos los representantes de categoría diferentes de rectángulos de Youden bajo la acción de $S(\mathcal{P})$. El proceso se lleva a cabo renglón por renglón. Se extiende un representante de cada órbita en la etapa i , esto es, para el renglón i , por medio de la acción del subgrupo apropiado de $S(\mathcal{P})$.

TABLA 5. Árbol de búsqueda de rectángulos de Youden de tamaño 3×4

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
* * * *	2 1 4 3	2 1 4 3
* * * *	* * * *	3 4 1 2
1.1 (24)	2.1 (3)	3.1 (2)
		1 2 3 4
		2 1 4 3
		3 4 2 1
		3.2 (2)
	1 2 3 4	1 2 3 4
	2 3 4 1	2 1 4 3
	* * * *	3 4 2 1
	2.2 (6)	3.3 (2) \rightarrow 3.2

De la tabla 5 el lector puede ver que el número total de *asignaciones* está dado por el producto de los números de diseños isomorfos que son equivalentes a cada subdiseño en cada etapa —renglones—, en el árbol de búsqueda, que conduce al representante de órbita completo. Hay sólo dos rectángulos de Youden no-isomorfos de tamaño 3×4 bajo la acción de $S(\mathcal{P})$. Los números dentro de paréntesis en la tabla 5 denotan todos los arreglos parciales que son isomorfos al tomado como su representante. Así,



se pueden generar $24 \times 3 \times 2 = 144$ asignaciones en un rectángulo de Youden del representante de órbita etiquetado como nodo 3.1. Cuando se genera el subdiseño en el nodo 3.3, se halla que es equivalente al subdiseño en el nodo 3.2 (denotado como $3.3 \rightarrow 3.2$), tomemos por ejemplo el elemento $(23)^3 \in S(\mathcal{P})$ y apliquémoslo al subdiseño en el nodo 3.3 para obtener aquel en el nodo 3.2. La contabilidad de repeticiones del primero es igual a $24 \times 6 \times 2 = 288$. De donde la contabilidad de repeticiones del subdiseño en el nodo 3.2 se incrementa de 144 a 432. Esto implica que el subdiseño en el nodo 3.2 contabiliza $24 \times 3 \times 2 + 24 \times 6 \times 2 = 432$ asignaciones. En consecuencia, tenemos dos representantes bajo la acción de $S(\mathcal{P})$ los cuales contabilizan 576 asignaciones de símbolos a celdas en el arreglo rectangular.

Como enunciamos arriba la acción del grupo S_4 sobre el conjunto Λ de rectángulos de Youden de tamaño 3×4 induce una partición de Λ en 24 órbitas tales que el estabilizador de los elementos clasificados de ese modo es el conjunto $\{e\}$. Usamos esta información en la sección 3.1.1.

El registro de contabilidad de repeticiones para rectángulos de Youden de tamaño 3×4 se da en la tabla 6. El lector puede hallar algunas ideas para implementar un algoritmo computacional en [10].

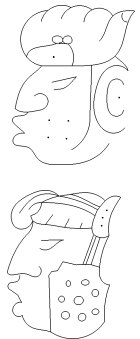
TABLA 6. Registro de contabilidad para rectángulos de Youden de tamaño 3×4

Nodo	Pariente	Auto-grupo-tamaño			Número equivalente	Ocurrencia esperada	Contabilidad repeticiones
		G_k''	G_k	G_k'			
1.1	—	144	144	48	24	24	24
2.1	1.1	16	32	16	3	72	72
2.2	1.1	8	16	8	6	144	144
3.1	2.1	8	24	24	2	144	144
3.2	2.1	8	8	8	2	432	144
3.3	2.2	4	8	8	2	432	288

Hemos ilustrado como todos los 24 rectángulos de Youden de tamaño 3×4 estadísticamente diferentes son categorizados en dos conjuntos de diferentes tamaños.

El árbol de búsqueda y el registro de contabilidad de las repeticiones para rectángulos de Youden de tamaños 4×5 y 5×6 aparecen en Gongora-Aldaz y Freeman [8]. Los resultados de la categorización se presentan en la siguiente subsección.

3.1.1. Rectángulos de Youden: resultados de la categorización. En esta sección presentamos nuestra categorización final de rectángulos de Youden de tamaños 3×4 , 4×5 y 5×6 . En cada uno de los siguientes tres casos (tamaños de los rectángulos de Youden) la primera columna lista sus representantes de órbita bajo la acción de $S(\mathcal{P})$ en orden para los renglones



de izquierda a derecha, la segunda columna reporta la contabilidad de arreglos estadísticamente diferentes dentro de la categoría correspondiente y finalmente, la tercera columna reporta el número total de *asignaciones*.

i) Tamaño 3×4

[1]	1234 2143 3412	6	144
[2]	1234 2143 3421	18	432
		**	** *
	TOTAL	24	576

La información presentada aquí se debe de interpretar del modo siguiente: el elemento en la órbita número 1 bajo $S(\mathcal{P})$ representa 6 arreglos estadísticamente diferentes, y contabiliza 144 *asignaciones* posibles de tratamientos a celdas bajo las restricciones de un rectángulo de Youden.

ii) Tamaño 4×5

[1]	12345 21453 34512 45231	960	115 200
[2]	12345 23451 31524 54132	240	*28 800
[3]	12345 23451 34512 45123	144	*17 280
		* * * *	* * * * *
	TOTAL	1 344	161 280

iii) Tamaño 5×6

[01]	123456 214365 345612 436521 561234	*7 200	*5 184 000
[02]	123456 214365 345612 436521 561243	21 600	15 552 000
[03]	123456 214365 345612 456123 561234	*7 200	*5 184 000
[04]	123456 214365 345612 456123 632541	*4 800	*3 456 000
[05]	123456 214365 345612 456231 562143	43 200	31 104 000
[06]	123456 214365 345612 456231 631524	43 200	31 104 000
[07]	123456 214365 351624 462513 536142	*2 400	*1 728 000
[08]	123456 214365 351624 462513 536241	21 600	15 552 000
[09]	123456 214365 351624 462531 546213	14 400	10 368 000
[10]	123456 214365 351624 462531 635142	21 600	15 552 000
[11]	123456 214365 351624 462531 645213	43 200	31 104 000
[12]	123456 214365 351624 465132 546213	*3 600	*2 592 000
[13]	123456 214365 351642 462531 536214	43 200	31 104 000
[14]	123456 214365 351642 465123 536214	86 400	62 208 000
[15]	123456 214365 351642 465123 546231	43 200	31 104 000
[16]	123456 214365 351642 465213 536124	43 200	31 104 000
[17]	123456 214563 341625 456132 562314	*4 320	*3 110 400



[18]	123456	214563	341625	456132	562341	21 600	15 552 000
[19]	123456	214563	341625	456231	635142	43 200	31 104 000
[20]	123456	214563	341625	465231	536142	21 600	15 552 000
[21]	123456	214563	342615	456231	561342	86 400	62 208 000
[22]	123456	214563	342615	456321	561234	43 200	31 104 000
[23]	123456	214563	342615	465231	536124	43 200	31 104 000
[24]	123456	214563	342615	465231	536142	21 600	15 552 000
[25]	123456	214563	342615	465231	651342	86 400	62 208 000
[26]	123456	214563	345612	436125	561234	14 400	10 368 000
[27]	123456	214563	345612	436125	562341	43 200	31 104 000
[28]	123456	214563	345612	456321	561234	14 400	10 368 000
[29]	123456	214563	345612	461235	536124	86 400	62 208 000
[30]	123456	214563	345612	461325	652134	10 800	*7 776 000
[31]	123456	214563	345621	462135	536214	21 600	15 552 000
[32]	123456	214563	345621	462135	651342	43 200	31 104 000
[33]	123456	214563	345621	536142	651234	21 600	15 552 000
[34]	123456	214563	351642	462135	536214	*4 320	*3 110 400
[35]	123456	214563	352614	461325	536142	*7 200	*5 184 000
[36]	123456	231564	312645	465213	546132	*2 400	*1 728 000
[37]	123456	231564	312645	465213	546321	*4 800	*3 456 000
[38]	123456	231564	314625	465213	546132	21 600	15 552 000
[39]	123456	231564	345612	416235	562143	* * *720	* * *518 400
[40]	123456	231564	345612	416235	562341	10 800	*7 776 000
						*****	*****
					TOTAL	1 128 960	812 851 200

3.2. Enumeración y categorización de rectángulos dobles de Youden

Mostramos en la sección 3.1 arriba que los representantes de órbita bajo la acción del grupo $S(\mathcal{P})$ contabilizan y generan todos los rectángulos de Youden en una órbita dada. En consecuencia, para propósitos de obtener una enumeración completa de RDY es suficiente utilizar los representantes de órbita de rectángulos de Youden presentados en la sección 3.1.1. Con objeto de ayudar en la visualización de los diseños a estudiar en esta sección se usarán letras latinas para representar el conjunto de tratamientos en el rectángulo de Youden utilizado en el experimento original. Para cada representante de órbita Y hallamos todas las superposiciones posibles de tratamientos que completan un RDY.

Recalcamos el hecho de que las restricciones del RDY permanecen fijas durante el proceso de generar todas los arreglos superpuestos que producen RDY. Por ejemplo, imagine un experimento en un diseño de rectángulo de Youden en horticultura. Después del experimento inicial, los gradientes de fertilidad (renglones y columnas) no se mueven. Análogamente, los efectos



residuales del experimento original tampoco se mueven.

Nosotros implementamos un algoritmo computacional simple. El lector puede deducirlo de las ideas generales presentadas en [10]. El algoritmo elimina las complicaciones de grupo de simetrías en la programación de computadora pero se requiere de poder computacional. Nuestra implementación del algoritmo incluye:

- uso de la acción del grupo S_t donde t denota el número de tratamientos superpuestos;
- definición de una función booleana que satisfaga las condiciones dadas por la Definición 11.

Se hallan los primeros renglones superpuestos no-isomorfos y posteriormente se lleva a cabo una búsqueda hacia atrás completa (*in-depth backtrack search*) con objeto de producir los renglones restantes en el arreglo superpuesto. Se lleva a cabo un chequeo sobre subdiseños extendibles por medio de la función booleana para cada renglón subsiguiente.

De la clasificación de rectángulos de Youden dada en la sección 3.1.1 no se halló RDY de tamaño 3×4 . En contraste, se produjo exactamente una superposición no-isomorfa —bajo S_4 — de símbolos para formar RDY de tamaño 4×5 para cada uno de los representantes de órbita indexados como 1 y 2 en la sección 3.1.1. Éstos están dados en la tabla 7.

TABLA 7. Representaciones de rectángulos de Youden de tamaño 4×5

A2 B3 C4 D1 E1	A1 B2 C3 D1 E4
B4 A1 D2 E4 C3	B4 C1 D4 E2 A3
C1 D4 E3 A3 B2	C2 A4 E1 B3 D2
D3 E2 B1 C2 A4	E3 D3 A2 C4 B1
[1]	[2]

De la sección 3.1.1 sabemos que hay 960 y 240 rectángulos de Youden estadísticamente diferentes de tamaño 4×5 categorizados en las órbitas 1 y 2, respectivamente. En consecuencia, los dos representantes de RDY de ese tamaño, dados en la tabla 7, contabilizan 960 y 240 arreglos de este tipo que son estadísticamente diferentes, respectivamente.

Entre los 40 representantes de órbita de rectángulos de Youden de tamaño 5×6 reportados en la sección 3.1.1 sólo 14 de ellos permiten superposiciones que forman RDY. Estos representantes de órbita aparecen indexados en la sección 3.1.1 con números 10, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 31, 32, 34, 35, 39 y 40. Por motivos de espacio los listamos —en orden de renglón de izquierda a derecha en la tabla 8 seguidos del conjunto de representantes de órbita de los arreglos superpuestos que forman RDY —También en orden por renglones de izquierda a derecha.

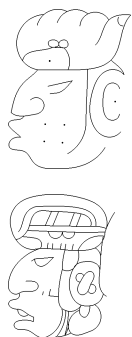


TABLA 8. Representantes de RDY de tamaño 5×6

Rectángulo de Youden 10 ABCDEF BADCFE CEAFFB DFBECA FCEADB
 {213145 542413 125234 334521 451352; 213145 454231 531422 325514 142353; 213145
 354521 431352 542213 125434; 213145 535412 154233 442351 321524}

Rectángulo de Youden 13 ABCDEF BADCFE CEAFFB DFBECA ECFBAD
 {211345 534221 425153 142534 353.412; 121345 434521 252413 515234 343152; 213451
 541532 135224 352143 424315}

Rectángulo de Youden 16 ABCDEF BADCFE CEAFFB DFEBAC ECFABD
 {123145 342513 455231 531422 214354; 121345 542413 313254 435122 254531; 234151
 513542 145324 451233 322415}

Rectángulo de Youden 17 ABCDEF BADEFB CDAFBE DEFACB EFBCAD
 {123451 345124 512342 234515 451233; 123451 451235 234514 512343 345122}

Rectángulo de Youden 18 ABCDEF BADEFB CDAFBE DEFACB EFBCDA
 {123451 345124 512342 234515 451233; 123451 451235 234514 512343 345122}

Rectángulo de Youden 19 ABCDEF BADEFB CDAFBE DEFBCA FCEADB
 {231415 512324 354142 143253 425531; 234115 413522 125453 541234 352341; 211345
 454213 523431 13252A 345152; 213145 432514 145253 524321 351432}

Rectángulo de Youden 20 ABCDEF BADEFB CDAFBE DFEBCA ECFADB
 {231415 512324 354142 145253 423531; 12345 334521 425153 541232 253414; 211345
 454213 523431 135524 342152; 123415 342541 415253 534122 251334}

Rectángulo de Youden 24 ABCDEF BADEFB CDBFAE DFEBCA ECFADB
 {231415 512324 354142 145253 423531; 12345 334521 425153 541232 253414; 211345
 454213 523431 135524 342152; 123415 342541 415253 534122 251334}

Rectángulo de Youden 31 ABCDEF BADEFB CDEFBA DFBACE ECFBAD
 {121345 345213 413452 234521 552134; 121345 452134 245213 513452 334521}

Rectángulo de Youden 32 ABCDEF BADEFB CDEFBA DFBACE FEACDB
 {213415 345321 524153 132542 451234 ; 213145 352314 145253 534421 421532; 231145
 514532 453213 342451 125324; 231415 512543 453124 124352 345231}

Rectángulo de Youden 34 ABCDEF BADEFB CEAFFB DFBACE ECFBAD
 {123451 342135 235214 551342 414523; 123451 451342 514523 335214 242135}

Rectángulo de Youden 35 ABCDEF BADEFB CEBFAD DFACBE ECFADB
 {123145 534212 451323 245531 312454 ; 213451 432125 125343 551234 344512; 123145
 452321 215434 334512 541253; 231415 415232 552143 123354 344521; 213451 541232
 432515 325144 154323; 231415 142523 425351 513244 354132; 231415 152343 445231
 314522 523154; 213451 331245 445312 554123 122534; 231415 513234 354142 145523
 422351; 123145 334521 45352 542213 251434; 123145 445312 551234 332451 214523;
 213451 552134 134245 341522 425313}



(continúa)

TABLA 8. Representantes de RDY de tamaño 5×6 (*continuación*)

Rectángulo de Youden 39 ABCDEF BCAEFD CDEFAB DAFBCE EFBADC
 {123451 512342 451233 345124 234515; 231145 125234 453412 342551 514323; 213415
 521243 455132 142354 334521; 231145 143523 522314 454231 315452; 213415 341532
 532144 154223 425351; 123451 314235 531524 252143 445312; 123451 452143 214235
 545312 331524; 213415 425341 154233 341552 532124; 231145 524314 455231 313452
 142523; 213415 354521 122354 531243 445132; 231145 453512 342351 514223 125434;
 123451 345125 512344 234513 451232}

Rectángulo de Youden 40 ABCDEF BCAEFD CDEFAB DAFBCE EFBCDA
 {123451 512342 451233 345124 234515; 231145 125234 453412 342551 514323; 231145
 453512 342351 514223 125434; 123451 345125 512344 234513 451232}

La información presentada en la tabla 8 debe interpretarse, por ejemplo, del siguiente modo: el representante de rectángulos de Youden de la órbita número 10 en la sección 3.1.1 permite cuatro superposiciones de tratamientos estadísticamente diferentes que forman RDY. Con objeto de aclarar la manera de leer la información presentada en la tabla 8 presentarnos los primeros dos representantes de RDY de este tamaño en forma rectangular en la tabla 9.

TABLA 9. Primeros dos representantes de RDY listados en la tabla 8

A2	B1	C3	D1	E4	F5		A2	B1	C3	D1	E4	F5
B5	A4	D2	C4	F1	E3		B4	A5	D4	C2	F3	e1
C1	E2	A5	F2	B3	D4		C5	E3	A1	F4	B2	D2
D3	F3	B4	E5	C2	A1		D3	F2	B5	E5	C1	A4
F4	C5	E1	A3	D5	B2		F1	C4	E2	A3	D5	B3
(a) Y_1						(b) Y_2						

4. RESULTADOS

Existen 24, 1 344 y 1 128 960 rectángulos de Youden estructuralmente diferentes de tamaños 3×4 , 4×5 y 5×6 para aplicaciones estadísticas. Estos fueron clasificados en la sección 3.1.1 en conjuntos de varios tamaños. Tal categorización se utiliza como base para la categorización de RDY.

La distribución de RDY de tamaño 5×6 está dada en la tabla 10 La primera columna da el número del representante de órbita de rectángulos de Youden como en la sección 3.1.1, la segunda columna cita el número de rectángulos de Youden estadísticamente diferentes contenidos en cada órbita, la columna 3 da el número de arreglos superpuestos no-isomorfos — bajo S_5 — que forman RDY. Finalmente, la última columna da el número total de RDY diferentes para su uso como diseños por bloques de tamaño 5×6 .

En resumen, no existe rectángulo doble de Youden de tamaño 3×4 . En contraste, aquellos de tamaño 4×5 han sido clasificados en dos conjuntos



TABLA 10. Distribución de RDY de tamaño 5×6

<i>Representación de Rectángulo de Youden núm.</i>	<i>Representa</i>	<i>Superposiciones (RDY)</i>	<i>Número total de RDY</i>
10	21 600	*4	*86 400
13	43 200	*3	129 600
16	43 200	*3	129 600
17	4 320	*2	**8 640
18	21 600	*2	*43 200
19	43 200	*4	172 800
20	21 600	*4	*86 400
24	21 600	*4	*86 400
31	21 600	*2	*43 200
32	43 200	*4	172 800
34	4 320	*2	**8 640
35	7 200	12	*86 400
39	720	12	**8 640
40	10 800	*4	*43 200
		**	* * * * *
		62	1 105 920

que contienen 1 200 arreglos estadísticamente diferentes de ese tamaño. Los rectángulos dobles de Youden de tamaño 5×6 se han clasificado en 62 conjuntos. Éstos representan un total de 1 105 920 rectángulos dobles de Youden estructuralmente diferentes para aplicaciones estadísticas.

RECONOCIMIENTOS

El primer autor expresa su agradecimiento al CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), ya que sin su apoyo financiero esta trabajo no hubiera sido posible.

Un tratado más amplio del tema discutido aquí se encuentra en Góngora-Aldaz y Freeman [8]. Las referencias [8, 9] contienen información adicional sobre: *i*) análisis estadísticos de los datos presentados aquí, *ii*) listado completo de los rectángulos de Youden de tamaño 4×5 , y *iii*) el árbol de búsqueda y tabla de contabilidad de repeticiones de rectángulos de Youden de tamaños 4×5 y 5×6 , respectivamente. Incluir todo ese material, el cual se espera pueda ahora ser reproducido por el lector, haría este artículo innecesariamente largo.



REFERENCIAS

- [1] Bailey, R. A., “Designs: Mappings Between Structured Sets”, en J. Siemons (editor), *Surveys in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1989, pp. 22–51.
- [2] Clarke, G. M., “A Second Set of Treatments in a Youden Square Design”, *Biometrics* **19**, (1963) pp. 98–104.
- [3] Christofi, C., “Enumerating 4×5 and 5×6 Double Youden Rectangles”, *Discrete Mathematics* **125**, (1994) pp. 129–135.
- [4] Durbin, J. R., *Modern Algebra: An Introduction*, segunda edición, John Wiley and Sons, Nueva York, 1985.
- [5] Fisher, R. A., “The Arrangement of Field Experiments”, *Journal of the Ministry of Agriculture* **33**, (1926) pp. 503–513,
- [6] Freeman, G. H., Department of Statistics, University of Warwick, 1994 (sin publicar).
- [7] Góngora-Aldaz, J. A., “On the Addition of Further Treatments to Latin Square Designs”, *PhD Thesis*, Department of Statistics, University of Warwick, 1997.
- [8] Góngora-Aldaz, J. A. y G. H. Freeman, “Full Enumeration of Youden Rectangles of Size $p \times (p + 1)$ for $p = 3, 4$ and 5 ”, *Research Report* **307**, Department of Statistics, University of Warwick, 1997.
- [9] Góngora-Aldaz, J. A. y G. H. Freeman, “Full Enumeration of Double Youden Rectangles of Size $p \times (p + 1)$ for $p = 4$ and 5 ”, *Research Report* **309**, Department of Statistics, University of Warwick, 1997.
- [10] Lam, C. W. H. y L. Thiel, “Backtrack Search with Isomorph Rejection and Consistency Check”, *J. Symbolic Computation* **7**, (1989) pp. 473–485.
- [11] Pearce, S. C. y J. Taylor, “The Changing of Treatments in a Long Term Trial”, *Journal of Agricultural Science* **38**, (1948) pp. 402–410.
- [12] Preece, D. A., “Classifying Youden Rectangles”, *J. Royal Statist. Soc. B* **28**, (1966) pp. 118–130.
- [13] Preece, D. A., “Fifty Years of Youden Squares: A Review”, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* **26**, (1990) pp. 65–75.
- [14] Preece, D. A., “Double Youden Rectangles —an Update with Examples of Size 5×11 ”, *Discrete Mathematics* **125**, (1994) pp. 309–317.
- [15] Youden, W. J., “Use of Incomplete Block Replications in Estimating Tobacco-Mosaic Virus”, *Cont. Boyce Thompson Inst.* **9**, (1937) pp. 41–48.
- [16] Youden, W. J., “Use of Incomplete Block Replications in Estimating Tobacco-Mosaic Virus”, *Cont. Boyce Thompson Inst.* **9**, (1940) pp. 41–48.

