Investigación

Sobre un subconjunto propio de segunda categoría no numerable del $[0,1]$

Rafael René del Río Castillo[*a]
y
Herminio Blancarte Suárez[**]

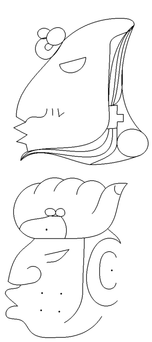
[*] IIMAS, UNAM
[**] Lic. en Matemáticas Aplicadas,
Facultad de Ingeniería, UAQ

RECIBIDO: *19 de julio 1999*
PUBLICADO: *febrero del 2000*

RESUMEN

Al generalizar el orden de aproximación de los subconjuntos de números racionales que se aproximan a un número irracional dado, se construye un subconjunto propio de segunda categoría *no numerable* del $[0,1]$. La no numerabilidad de dicho subconjunto se demuestra como consecuencia del famoso *Teorema de categoría de Baire*.

I. Introducción



En el centenario del *teorema de Baire* demostrado por R. Baire (1899) sobre la recta real, versiones modernas fueron demostradas por C. Kuratowsky (1930) y por S. Banach (1930) (Reed y Simon, 1975).

Sea $D = \{s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots\}$ un subconjunto denso y numerable del $\mathbf{I} = [0,1]$ y sea $F\colon D \to \mathbf{R}^+$ una función cualesquiera, donde $\mathbf{R}^+$ denota el conjunto de los reales positivos.

Teorema 1. *Si* $\mathbf{E} \equiv \{x \in \mathbf{I}\colon |x - s_k| < F(s_k)$ *para una infinidad de puntos* $s_k \in D\}$. *Entonces,* $\mathbf{E}$ *es de segunda categoría no numerable.*

[a]Cátedra Patrimonial Nivel II. SEP–CONACyT, Ref. SC-980004

Sobre la aproximación de irracionales por racionales (Hardy y Wright, 1979; Khintchine, 1961), se establece el siguiente resultado:

Sea $\varphi(q)$ una función positiva arbitraria de la variable q, un número natural. Entonces siempre se puede encontrar un número irracional α tal que la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \phi(q)$$

tiene un número infinito de soluciones en enteros p y q.

El teorema 1 pretende ser una generalización de este resultado.

II. Definiciones y preliminares

Las siguientes definiciones son sobre subconjuntos de la recta real.

Definición 1. Un conjunto es *denso en ninguna parte* si el interior de su cerradura es vacío.

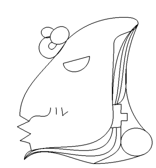
Definición 2. Un conjunto se llama de *primera categoría* si es la *unión numerable* de *conjuntos densos en ninguna parte.*

Definición 3. Todo conjunto que no es de primera categoría se llama de *segunda categoría* (Oxtoby, 1970).

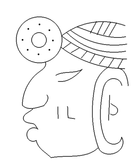
Teorema 2 (Teorema de la categoría de Baire). *El complemento de cualquier conjunto de primera categoría sobre la recta es denso. Ningún intervalo en la recta es de primera categoría. La intersección numerable de abiertos densos es densa.* (Oxtoby, 1970)

Lema 1. *Sea* $\mathbf{I} = [0,1]$*, si* $A \subset \mathbf{I}$ *tal que*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{1}$$



donde $\Phi \neq B_i$*, y* B_i *es abierto y denso* $\forall i \in \mathbf{N}$*, entonces* A *es no numerable.*



Demostración: Por el teorema de Baire (teorema 2), sabemos que A es denso. Utilizando reducción al absurdo, supongamos que A es numerable. Consideremos una enumeración de $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\}$, donde ninguno de los puntos p_i son puntos aislados de $\mathbf{I}$. Definamos

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv \mathbf{I} \setminus \{p_1\}, \\ A_2 &\equiv \mathbf{I} \setminus \{p_2\}, \\ \vdots &\qquad \vdots \\ A_i &\equiv \mathbf{I} \setminus \{p_i\}, \qquad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \ldots\} \quad \text{en general.} \end{aligned} \tag{2}$$

A_i es abierto y denso $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$. Ahora consideremos el conjunto

$$C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \bigcap A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right), \tag{3}$$

así C, por el teorema de Baire, es denso. Pero por la definición de A_i, tenemos que $C = \phi$. Por lo tanto, A es no numerable. ■

III. Demostración del teorema

Sea $\mathbf{E} \equiv \{x \in \mathbf{I}\colon |x - s_k| < F(s_k)$ para una infinidad de puntos $s_k \in D\}$. Sea

$$V_k = \{y \in \mathbf{I}\colon |y - s_k| < F(s_k)\}, \tag{4}$$

las bolas centradas en cada s_k con radio $F(s_k)$. En términos de tales V_k, $\mathbf{E}$ se puede caracterizar como

$$\mathbf{E} = \limsup_{n \to \infty} V_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} V_k \right). \tag{5}$$

Sea

$$W_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k. \tag{6}$$

Por hipótesis D es denso y

$$D \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\} \subset W_n,$$

entonces W_n es denso y abierto para $\forall n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n. \tag{7}$$

Por el teorema de Baire y el lema 1, **E** es de segunda categoría y no numerable. ∎

Referencias bibliográficas

[1] Abian, A., "A Property of Baire First Category Sets", *Boletín de la Soc. Mat. Mexicana* **20**, segunda serie, 1 (abril de 1975), pp. 33–34.

[2] Baire, R., "Sur les fonctions de variables réelles", *Ann. Math.* **3** (1899), pp. 1–32.

[3] Banach, S., "Théorèmes sur les ensembles de premières catégorie", *Fund. Math.* **9** (1930), pp. 395–398.

[4] Hardy, G. H. y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, quinta edición, Oxford Science Publications, 1979.

[5] Khintchine, A., *Continued Fractions*, tercera edición, University of Chicago Press, 1961.

[6] Kuratowsky, C., "La propiérté de Baire dans les espaces métriques", *Fund. Math.* **16** (1930), pp. 390–394.

[7] Oxtoby, J. C., *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1970.

[8] Reed, M. y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 1: Functional Analysis, Academic Press, Inc., 1975.