Docencia

Uso de representaciones geométricas para facilitar la transición de la aritmética al álgebra[1]

Alfinio Flores Peñafiel
Arizona State University

RECIBIDO: *noviembre de 1998*
PUBLICADO: *febrero del 2000*

Introducción

Una de las causas principales de tropiezo para los estudiantes de matemáticas es la transición de la aritmética al álgebra. Una de las dificultades es que en álgebra se necesitan representar afirmaciones que son válidas para todos los números (o para todos los números en un conjunto) mediante expresiones que utilizan variables. Los estudiantes necesitan desarrollar la habilidad de manipular las expresiones simbólicas, pero al mismo tiempo es importante que estas expresiones tengan sentido para ellos. Una forma de ayudar a los alumnos es utilizando representaciones geométricas, de las llamadas "pruebas sin palabras". En estas pruebas, si bien la figura no constituye en sí una prueba completa, contiene los elementos que permitirán a al alumno hacer razonamientos de tipo general, aunque sólo se ilustre un caso particular. Un paso importante es verbalizar lo que las figuras y las ecuaciones representan, utilizando el lenguaje natural. Es importante también ver cómo partes y términos de las ecuaciones están representados por partes de las figuras. En este artículo se presentan tres ejemplos de cómo puede el maestro utilizar estos medios.

[1] Dedicado a Bud Trimble.

Ejemplo 1

Las siguientes figuras representan los números consecutivos 9, 10, 11 y 12.

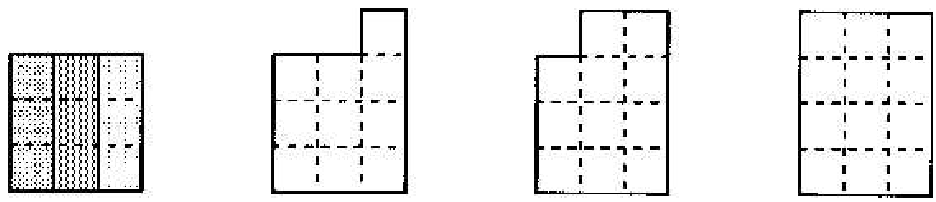


Figura 1. $9 + 10 + 11 + 12$.

Si descomponemos la primera figura en columnas y le añadimos una de estas columnas a cada una de las figuras restantes, obtenemos tres números consecutivos, 13, 14 y 15.

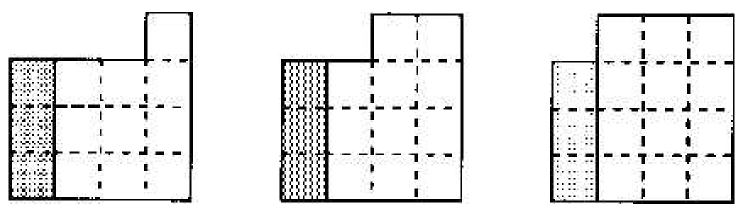


Figura 2. $13 + 14 + 15$.

Como el número total de cuadros no cambio, tenemos que $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$. Este es un caso particular de una serie de igualdades de sumas de números consecutivos:

$$1 + 2 = 3,$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8,$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15,$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24.$$

Dibuja las figuras que corresponden a las primeras dos ecuaciones. Escribe la siguiente ecuación. Podemos describir verbalmente la relación sugerida por estas ecuaciones. Vamos a hacerlo primero para el caso particular $9+10+11+12$. De un lado, empezamos con tres al cuadrado, y luego sumamos los siguientes tres números consecutivos. Del otro lado de la ecuación también hay tres números. El último término es el cuadrado de cuatro, menos uno. En general, se empieza con el cuadrado de un número n^2, se le suman los siguientes n enteros consecutivos, el último sumando es por tanto $n^2 + n$. Esto es igual a la suma de los siguientes n enteros consecutivos, empezando con $n^2 + n + 1$, y terminando en $n^2 + 2n$, que es lo mismo que $(n+1)^2 - 1$. En términos algebraicos:

$$\begin{aligned} n^2 &+ (n^2+1) + (n^2+2) + \cdots + (n^2+n) \\ &= (n^2+n+1) + (n^2+n+2) + \cdots + (n^2+2n). \end{aligned}$$

Como se ve, el término n^2 de la parte izquierda se descompone en n sumandos de n que se añaden a los términos restantes, para dar los términos de la derecha.

Ejemplo 2. Suma de enteros consecutivos y suma de cubos

Las figuras de la hilera de la izquierda de la figura 3 representan los números 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16. Los cubos coloreados de las primeras tres rebanadas se reacomodan sobre las figuras de atrás, a fin de tener 3 rebanadas de 9 cubos, y 4 rebanadas de 16. Estas rebanadas se pueden reacomodar para formar dos cubos. Como el total del número de cubos no cambió, tenemos que $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$.

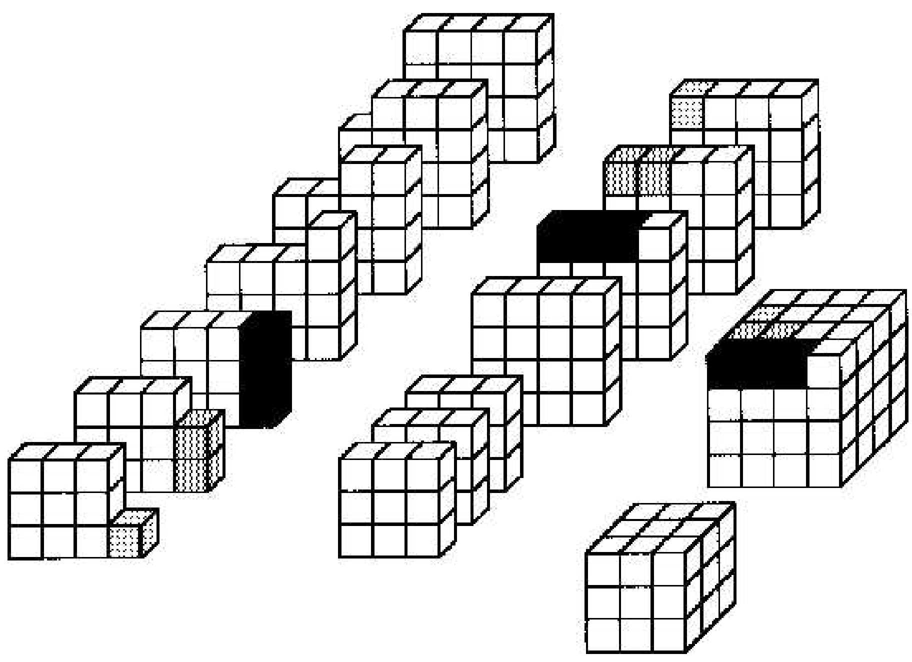


Figura 3. $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$.

Este es un caso particular de una serie de igualdades entre sumas de números consecutivos y sumas de dos cubos consecutivos:

$$2+3+4=1^3+2^3$$
$$5+6+7+8+9=2^3+3^3$$
$$10+11+12+13+14+15+16=3^3+4^3$$
$$17+18+19+20+21+22+23+24+25=4^3+5^3$$

Bosqueja las figuras que corresponden a las primeras dos ecuaciones. Identifica los números en las ecuaciones como partes de las figuras correspondientes. Escribe la siguiente ecuación en la serie. Podemos describir la relación sugerida por estos ejemplos verbalmente. Vamos a hacerlo primero con el caso $10+11+12+13+14+15+16$. En la parte izquierda de la ecuación, empezamos con el cuadrado de tres más uno, y le sumamos los seis siguientes números consecutivos hasta incluir cuatro al cuadrado. En la parte derecha de la ecuación, sumamos tres al cubo y cuatro al cubo. En general, empezamos con el cuadrado de un número más uno, n^2+1, y sumamos los siguientes $2n$ números consecutivos hasta incluir $(n+1)^2$. Del lado derecho tenemos $n^3+(n+1)^3$. Utilizando símbolos algebraicos, $(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n+1)^2=n^3+(n+1)^3$. Para hacer más claro por qué la igualdad es cierta podemos escribir la parte izquierda como:

$$(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)+[(n+1)^2-n]+\cdots+[(n+1)^2-1]+(n+1)^2.$$

Ejemplo 3

Las columnas en la figura 4 corresponden a las siguientes ecuaciones:

$$1=1\times 1=1^3$$
$$3+5=2\times 4=2^3$$
$$7+9+11=3\times 9=3^3$$
$$13+15+17+19=4\times 16=4^3$$

Identifica cuál figura corresponde a cada ecuación. ¿Cuál sería la siguiente ecuación? Bosqueja la siguiente figura. Identifica los números en cada una de las ecuaciones con diferentes partes de la figura correspondiente.

Podemos expresar la relación sugerida verbalmente. Cada columna representa por una parte la suma de números impares consecutivos (cada número

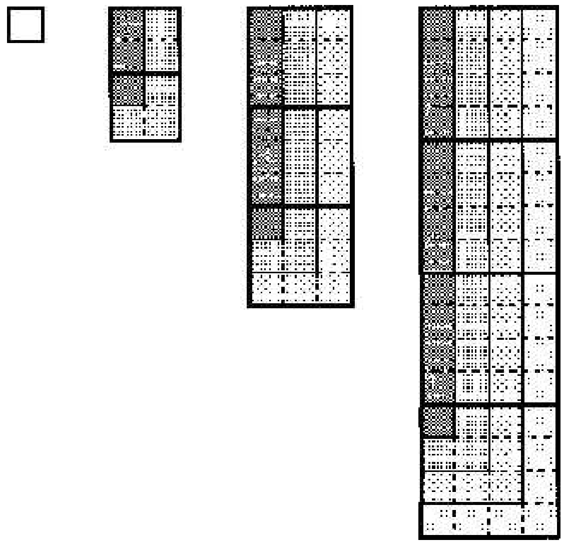
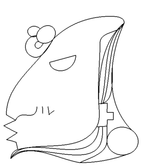


FIGURA 4. Suma de impares y suma de cubos.

par es una tira delgada dentro de la columna), y por otra el cubo de un número. Cada columna tiene un número creciente de tiras: 1, la primera; 2, la segunda; 3, la tercera. El número de tiras antes de una columna es el número triangular correspondiente. Por ejemplo, antes de la tercera columna hay $1+2$ tiras, por lo que la tercera columna empieza en $7 = 2\times 3+1$ e incluye tres números nones consecutivos. Por otro lado es también 3 al cubo. En general, la columna n-ésima, es la suma de n números impares, empezando con $2(1+2+\cdots+(n-1))+1$, y terminando en $2(1+2+\cdots+n)-1$. La suma total de los cuadros en todas las columnas es por un lado la suma de $(1+2+\cdots+n)$ números impares: $1+3+5+\cdots+2(1+2+\cdots+n)-1$, y por otro lado es la suma de los cubos $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$. Escribimos esto como una ecuación: $1+3+5+\cdots+[2(1+2+\cdots+n)-1] = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

EJEMPLO 4



Es fácil ver que la suma de los primeros números impares es un cuadrado (véase la figura 5). Por tanto, la suma de números cubos que es igual a la suma de números impares es también un cuadrado. Recordemos que:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(este resultado se puede derivar de muchas formas, la más conocida tal vez sea usando el método que encontró Gauss cuando era pequeño —véase [1]

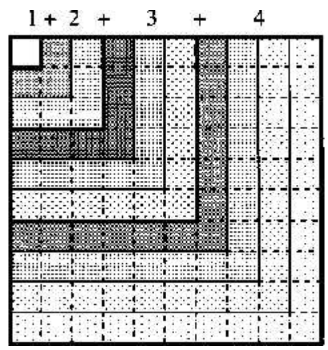


Figura 5.

para una derivación geométrica). Las tiras de la figura 4 se han reacomodado para formar el cuadrado de la figura 5. Las columnas de la figura 4 corresponden a figuras en L de grosor 1, 2, 3 y 4, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 1^2\\
1^3 + 2^3 &= (1+2)^2\\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1+2+3)^2\\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1+2+3+4)^2
\end{aligned}
$$

Podemos por tanto concluir que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Conclusión

El uso de representaciones geométricas de relaciones entre números puede ayudar a los estudiantes a establecer la conexión con la notación algebraica. Las representaciones geométricas pueden ayudar a los estudiantes a ver qué representan cada uno de los términos en una ecuación algebraica. Al mismo tiempo, las figuras ayudan a hacer razonamientos matemáticos de tipo general.

Referencias

[1] Flores Peñafiel, A., "Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: pruebas que explican", *Miscelánea Matemática* **19** (1993) pp. 11–23.