Divulgación

En torno a la representación conforme de una superficie simplemente conexa y compacta sobre una esfera

Leonardo Solanilla

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Tulane, Nueva Orleans, LA, **EUA**

RECIBIDO: *6 de octubre de 1998*
PUBLICADO: *febrero del 2000*

RESUMEN

Este es el tercero y último de una serie de artículos destinados a aquellos que, teniendo bien aprendido su análisis, deseen iniciarse en la investigación contemporánea sobre el problema de prescribir la función de curvatura a una variedad riemanniana bidimensional (S, g). En esta ocasión queremos utilizar un enfoque variacional para probar la solubilidad de la ecuación diferencial

$$\Delta_g u + Ke^{2u} - k = 0 \tag{1}$$

en una variedad orientada, compacta y simplemente conexa (S, g). De acuerdo con el primer artículo, Δ_g y k designan respectivamente el operador de Laplace–Betrami y la curvatura en la métrica g. Como nuestro propósito es deformar la variedad hasta convertirla en esfera, $K > 0$ es una constante.

I. Formulación del problema en el marco del cálculo de variaciones. Soluciones débiles

La idea principal es minimizar:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS - \int_S \left(\frac{K}{2}e^{2u} - ku\right) dS,$$

cuya ecuación de Euler–Lagrange es precisamente (1). Este funcional se puede entender como una "medida" de la deformación conforme. Es decir, si dibujamos una figura cualquiera sobre (S, g) procuramos que su imagen sobre (S, ge^u) sea lo menos "distorsionada" posible. Tal interpretación cartográfica se debe a Chebyschev (1856).

Como K es una constante, este problema se puede transformar en un problema de valor extremo condicionado, a saber: *minimizar*

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS + \int_S ku \, dS \tag{2}$$

bajo la condición

$$\mathcal{G}(u) = \int_S e^{2u} \, dS = 1. \tag{3}$$

Esta condición es equivalente a la fórmula de Gauss–Bonnet y significa que también estamos prescribiendo la curvatura total o *curvatura integra*, como decía Gauss.

Claro que primero vamos a definir el espacio de Banach en el cual buscar una "solución débil" al problema.[1] Sea pues $H = H\{(S, g)\}$ el espacio de las $\{u\}$ en (S, g) tal que

$$\|u\|_H^2 = \int_S |\nabla_g u|^2 \, dS + \int_S u^2 \, dS < +\infty,$$

las derivadas entendidas como derivadas débiles. Este es un espacio de Sobolev que es también Hilbert con producto interior

$$\langle u, v\rangle = \int_S \nabla_g u \cdot \nabla_g v \, dS + \int_S uv \, dS.$$

Nuestro plan general consta de dos etapas:

[1] Hubiésemos querido usar un método de fines del siglo XIX o comienzos del XX, anterior a la integral de Lebesgue y al análisis funcional. Sin embargo, tales métodos no se consideran elegantes hoy en día. Además eso nos llevaría muchas páginas de cálculos innecesarios. Al lector interesado en el asunto se le recomienda en particular Lichtenstein (1916).

A. Encontrar una solución $u \in H$ al problema (2)–(3). Siguiendo a McOwen (1985), la teoría de los extremos condicionados implica entonces que

$$\int_S \nabla_g u \cdot \nabla_g \phi \, dS + \int_S k\phi \, dS = K \int_S e^{2u} \phi \, dS, \qquad \forall \phi \in H, \tag{4}$$

es decir, u es una *solución débil* de (1).

B. Probar que $u \in C^2 = C^2(S, g)$, es decir, u es una *solución clásica* de (1).

Por cierto, en (4) vemos que K es el multiplicador de Lagrange del problema.

II. Análisis en (S, g)

Para lograr A, lo primero es acotar los términos que aparecen en los funcionales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Sea pues

$$N = \{u \in H \colon \int_S u \, dS = 0\}.$$

Claramente, N es un subespacio cerrado y convexo de H que se deja interpretar como el subspacio de las funciones que tienen valor medio nulo en (S, g) o como el subespacio de funciones que son ortogonales a las constantes. Si M es el subespacio de las constantes, H se puede descomponer ortogonalmente en $M \oplus N$. En vista de que no tenemos que preocuparnos mucho por M, nos concentraremos en obtener las desigualdades necesarias para el acotamiento de los funcionales en N.

Desigualdad de Poincaré

Existe una constante positiva C_P tal que para toda $u \in N$,

$$\int_S u^2 \, dS \le C_P \int_S |\nabla_g u|^2 \, dS. \tag{5}$$

Sinopsis de la demostración. Basta recurrir al principio del mínimo para el primer valor diferente de cero en el espectro de (S, g), (Berger *et al.*, 1971). Tal principio predica que dicho valor propio coincide con el *infimum* de un cociente de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS}{\int_S u^2 \, dS} \colon u \in N \right\}.$$

Así pues, basta poner $C_P = \lambda_1^{-1} \odot$

Desigualdad de Sobolev

Hay una constante positiva C_S tal que para toda $u \in N$ y $p \geq 1$,

$$\left(\int_S |u|^p \, dS\right)^{1/p} \leq p^{1/2} C_S \left(\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Sinopsis de la demostración. La parte verdaderamente analítica consiste en probar la existencia de una constante C tal que, para toda $u \in H$,

$$\left(\int_S |u|^p \, dS\right)^{1/p} \leq p^{1/2} C \left[\left(\int_S u^2 \, dS\right)^{1/2} + \left(\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS\right)^{1/2}\right].$$

(véase, por ejemplo, Kazdan y Warner, 1974). De esta forma, (6) es una consequencia de (5) $\odot$

Desigualdad de Trudinger

Existen constantes positivas τ y C_T tales que si $u \in N$, entonces para toda $\alpha > 0$ y $\beta < 2\pi\tau$,

$$\log \int_S e^{\alpha |u|} \, dS \leq \log C_T + \frac{\alpha^2}{4\beta} \int_S |\nabla_g u|^2 \, dS. \tag{7}$$

Sinopsis de la demostración. Procedemos en dos tiempos. Primeramente probaremos que si $u \in N$ satisface $\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS \leq 1$, entonces existen constantes positivas β y C_T tales que

$$\int_S e^{\beta u^2} \, dS \leq C_T.$$

Ciertamente, si usamos la expansión de Taylor de la función exponencial y (6), encontramos que

$$\int_S e^{\beta u^2} \, dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \int_S |u|^{2n} \, dS \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2n\beta C_S^2\right)^n}{n!}.$$

Si exigimos que $2e\beta C_S^2 < 1$, esta serie converge a cierto valor C_T (criterio de D'Alembert). Esto prueba la primera parte. En segundo lugar, para cualquier $u \in N$,

$$\hat{u} = \frac{u}{\left(\int_S |\nabla_g u|^2 \, dS\right)^{1/2}}$$

tiene integral de Dirichlet ≤ 1. Por lo tanto, para toda $\alpha > 0$,

$$\alpha |u| \leq \frac{\alpha^2}{4\beta} \int_S |\nabla_g u|^2 \, dS + \beta \hat{u}^2$$

implica

$$\int_S e^{\alpha|u|} \, dS \leq C_T e^{\alpha^2/4\beta} \int_S |\nabla_g u|^2 \, dS \odot \tag{8}$$

Constante de Trudinger

Tal como en el caso de la desigualdad de Poincaré, es natural preguntarse por el *supremum* de los valores τ que hacen verdadera la desigualdad de Trudinger. En nuestro caso dicho valor es $\tau = 2$, y así, la tesis del lema anterior es verdadera para toda $\beta < 4\pi$. Este resultado, posterior al original de Trudinger (1967), se debe a Moser (1971) y Cherrier (1979).

También vamos a necesitar una proposición acerca de la

Compacidad

La aplicación inyectiva $N \hookrightarrow L^2 = L^2(S, g)$ dada por $u \mapsto e^{2u}$ es compacta.

Sinopsis de la demostración. Primero nos damos cuenta que (8) garantiza que $e^{2u} \in L^2$ cuando $u \in N$. Tenemos que probar que si $u_i \rightharpoonup u$ (u_i converge débilmente a u) en N, entonces $e^{2u_i} \to e^{2u}$ en L^2. Ahora bien, si $u_i \rightharpoonup u$ en N, entonces el teorema de Rellich–Kondrachov predica que $u_i \to u$ en $L^q = L^q(S, g)$ para toda $q \geq 1$, en particular, para $q = 4$. Pero $|e^t - 1| \leq |t| e^{|t|}$ y la utilización de la desigualdad de Cauchy–Schwarz (varias veces) arroja

$$\begin{aligned}
\int_S |e^{2u_i} - e^{2u}|^2 \, dS &= \int_S e^{4u} |e^{2u_i - 2u} - 1|^2 \, dS \leq \int_S e^{4u} e^{4|u_i - u|} |u_i - u|^2 \, dS \\
&\leq \left(\int_S e^{16u} \, dS\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_S e^{16|u_i - u|} \, dS\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_S |u_i - u|^4 \, dS\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración porque las dos primeras integrales de la línea anterior se pueden acotar usando (8) y la integral restante es el cuadrado de la norma en L^4, que sabemos se puede hacer menor que cualquier $\epsilon > 0$ mediante la elección de una i suficientemente grande $\odot$

III. Existencia de una solución débil

Cuando escribimos $u = 2c + v \in H$ con $c \in M$ (la mitad del valor medio de u en (S, g), si se quiere) y $v \in N$, el funcional que estamos minimizando se tranforma en

$$\mathcal{F}(v) = \tfrac{1}{2}\int_S |\nabla_g v|^2 \, dS + \int_S kv \, dS + 4\pi c,$$

donde hemos usado la fórmula de Gauss–Bonnet que en nuestro caso dice: $\int_S k \, dS = 4\pi$. Ahora bien, de la condición (3),

$$c = -\tfrac{1}{4}\log \int_S e^{2v} \, dS.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(v) = \tfrac{1}{2}\int_S |\nabla_g v|^2 \, dS + \int_S kv \, dS - \pi \log \int_S e^{2v} \, dS. \tag{9}$$

Sea C_k la norma L^2 de k. Las desigualdades de arriba dejan en claro que

$$\int_S |kv| \, dS \leq C_k C_P^{1/2} \left(\int_S |\nabla_g v|^2 \, dS \right)^{1/2}, \tag{10}$$

$$\log \int_S e^{2|v|} \, dS \leq \log C_T + \frac{1}{\beta}\int_S |\nabla_g v|^2 \, dS. \tag{11}$$

Al definir $\|v\| = \left(\int_S |\nabla_g v|^2 \, dS \right)^{1/2}$ se puede ver que (9), (10) y (11) implican que $\mathcal{F}$ es acotado inferiormente. Ciertamente,

$$\mathcal{F}(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{\beta} \right) \|v\|^2 - A\|v\| - B \tag{12}$$

para ciertas constantes A, B y $\beta = 3\pi$, por ejemplo.[2]

Enseguida debemos probar que el mínimo de $\mathcal{F}$ *sí* ocurre en H y satisface la restricción (3). Para tal fin consideramos una sucesión minimizante

$$u_i = 2c_i + v_i \subset H, \quad c_i \subset M, \quad v_i \subset N.$$

[2]Como el lector se habrá dado cuenta, este acotamiento se puede hacer sin el conocimiento de la constante de Trudinger. De hecho, Berger (1969) demostró el resultado en cuestión sin usar las contribuciones de Moser (1971) o Cherrier (1979) a la desigualdad de Trudinger.

Como $\mathcal{F}(u_i)$ es acotado, (12) implica que todos los miembros de la sucesión v_i son acotados en la norma de H. En consecuencia, podemos extraer una subsucesión $v_j \subset N$ que converja débilmente a cierta $v \in N$. Por nuestro resultado de compacidad $e^{2v_j} \to e^{2v}$ en L^2. Por Cauchy–Schwarz debemos tener

$$\int_S |Ke^{2v_j} - Ke^{2v}|\, dS \leq K|S|_g^{1/2}\epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$ cuando j es suficientemente grande, $|S|_g$ queriendo decir el área total de (S, g). Entonces

$$\begin{aligned} &\int_S Ke^{2v_j}\, dS \to \int_S Ke^{2v}\, dS, \\ &-\tfrac{1}{4}\log \int_S Ke^{2v_j}\, dS = c_j \to c = -\tfrac{1}{4}\log \int_S Ke^{2v}\, dS \end{aligned}$$

y $u = 2c + v \in H$ nos da el mínimo buscado que satisface (2), (3) y por lo tanto, también (4). Así, $\phi \equiv 1$ nos da $K = 4\pi$.

IV. Regularidad de la solución

Solamente hace falta demostrar B y se trata de una propiedad *local*. Procediendo como en Troyanov (1991), en la misma línea de pensamiento del primer artículo, escribimos la ecuación (1) en coordenadas isotérmicas locales:

$$\Delta_g u = \frac{1}{\rho_g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\Delta u}{\rho_g} = k - Ke^{2u},$$

donde $\rho_g \neq 0$ cumple claramente con los requisitos necesarios de diferenciabilidad para asegurar lo que sigue.

Continuidad de Hölder

Por la desigualdad de Trudinger, $e^{2u} \in L^p$ para toda $p < \infty$. En consecuencia, $\rho_g\left(k - Ke^{2u}\right) \in L^p$ para cierta $p > 1$ y podemos usar el siguiente teorema sobre la regularidad local para el problema de Poisson (Dautray y Lions, 1990).

Teorema. *Sea Ω un dominio cualquiera en $\mathcal{R}^2$ y $f \in L^p(\Omega)$ para cierta $p > 1$. Si $u \in H(\Omega)$ es una solución débil de $\Delta u = f$, entonces u posee continuidad de Hölder.*

Resaltamos el hecho de que el operador que necesitamos para aplicar este teorema es el laplaciano "clásico" Δ y no el operador de Laplace–Beltrami Δ_g.

Diferenciabilidad

Ya que u tiene continuidad de Hölder, $\rho_g\left(k - Ke^{2u}\right)$ es también Hölder y podemos aplicar el teorema siguiente (Dautray y Lions, 1990).

Teorema. *Sea Ω un dominio en $\mathcal{R}^2$ con frontera diferenciable. Si $f, u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ satisfacen $\Delta u = f$, entonces $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Concluimos que u es una solución clásica de (1).

Referencias bibliográficas

[1] Berger, Me. S., "On the Conformal Equivalence of Compact 2-Dimensional Manifolds", *J. of Math. and Mech.* **19** 1 (1969), pp. 13–18.

[2] Berger, Ma., P. Gauduchon y E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Springer, Berlín, 1971, p. 186.

[3] Chebyschev, P. F., "Sur la construction des cartes géographiques", *Oeuvres*, tomo I, Chelsea, Nueva York, 1856.

[4] Cherrier, P., "Une inégalité de Sobolev sur les variétés riemanniennes", *Bull. Sci. Math.* **103** (1979), pp. 353–374.

[5] Dautray, R. y J-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 1, cap. II, sec. 3.2, Springer, Berlín, 1990.

[6] Kazdan, J. y F. Warner, "Curvature Functions for Compact 2-Manifolds", *Ann. of Math.* **99** (1974), pp. 14–47.

[7] Lichtenstein, L., "Integration der Differentialgleichung $\Delta_2 u = ke^u$ auf geschlossenen Flächen", *Acta Mathematica* **40** (1916), pp. 1–34.

[8] McOwen, R., "Conformal Metrics in $\mathcal{R}^2$ with Prescribed Gaussian Curvature and Positive Total Curvature", *Indiana Univ. Math. J.* **34** 1 (1985), pp. 97–104.

[9] Moser, J., "A sharp form of an inequality", N. S. Trudinger (editor), *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971), pp. 1077–1092.

[10] Solanilla, L., "Sobre la formulación del problema de prescibir la curvatura de una variedad riemanniana bidimensional", *Eureka* **13** (1998), 45-52; "Sobre la imposibilidad de la representación conforme de la totalidad del plano euclidiano sobre una superficie de curvatura positiva constante, *Eureka* **14** (1999), 21–33.

[11] Troyanov, M., "Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities", *Transc. Am. Math. Soc.* **324** 2 (1991), pp. 793–821.

[12] Trudinger, N. S., "On Imbeddings into Orlicz Spaces and some Applications", *J. of Math. and Mech.* **17** (1967), pp. 473–483.