Continuidad de las funciones convexas

José Villa Morales
Universidad Autónoma de Aguascalientes

1 de abril de 1998

RESUMEN

El propósito del presente trabajo es demostrar que una función convexa es continua. Este hecho es bastante conocido y el mérito, quizá, es demostrar la afirmación anterior de la manera más fácil posible.

Introducción

En los primeros semestres de la licenciatura es, comúnmente, introducido el concepto de función convexa. El autor cree que el presente trabajo puede ayudar a la mejor comprensión de este concepto.

A continuación recordaremos qué es una función convexa.

Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *convexa* en $[a,b]$ si para cualesquiera $u, v \in [a,b]$, con $u < v$, se cumple que la pendiente de la recta de $(u, f(u))$ a $(r, f(r))$ es menor que la pendiente de la recta de $(u, f(u))$ a $(v, f(v))$, es decir,

$$\frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}\,, \tag{1}$$

donde r es un punto arbitrario de (u, v). O bien, de manera equivalente, f es convexa si

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(r)}{v - r}\,. \tag{2}$$

La interpretación heurística de esta definición es que si "le echamos agua por arriba de la gráfica de f en $[a,b]$ no se le cae". En la literatura existen muy buenas referencias sobre este tema (*cf.* [1] y [2]).

Usando (1) y (2) es fácil demostrar que si $a < r$ y $s < v$, entonces

$$\frac{f(r) - f(u)}{r - u} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(s)}{v - s}\,, \tag{3}$$

donde puede ocurrir que $r > s$ (véase la figura 1).

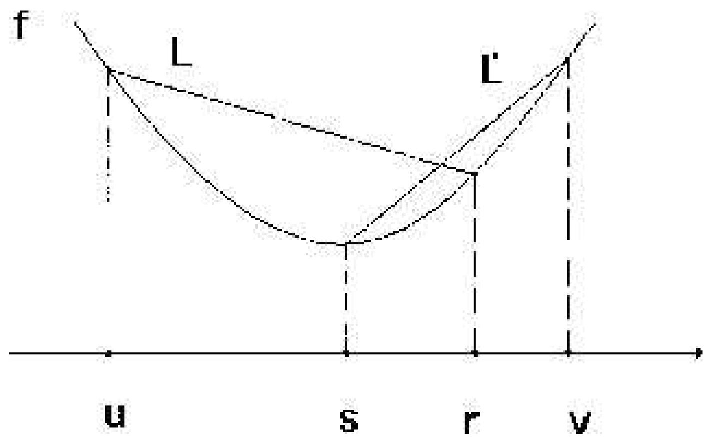

FIGURA 1.

Nótese que los extremos de la desigualdad (3) significan que la pendiente de la recta L es menor que la pendiente de la recta L', lo cual es intuitivamente claro por la convexidad de f.

Toda función convexa es continua

Antes de demostrar que toda función convexa es continua, es conveniente recordar que una función f es continua en x si:

a) existe $\lim_{v\to x} f(v)$ y
b) $\lim_{v\to x} f(v) = f(x)$.

Además, ya que $\lim_{v\to x} f(v)$ existe si y sólo si existen los límites laterales y son iguales, es decir, $\lim_{v\downarrow x} f(v) = \lim_{v\uparrow x} f(v)$. De esta manera, una función f es continua en x si *a*) existen $\lim_{v\downarrow x} f(v)$ y $\lim_{v\uparrow x} f(v)$, y son iguales a $f(x)$.

Teorema. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, f es continua.*

Demostración: Sea $x \in (a,b)$ y $a < x < v < b$. Entonces, usando (1) y (3)

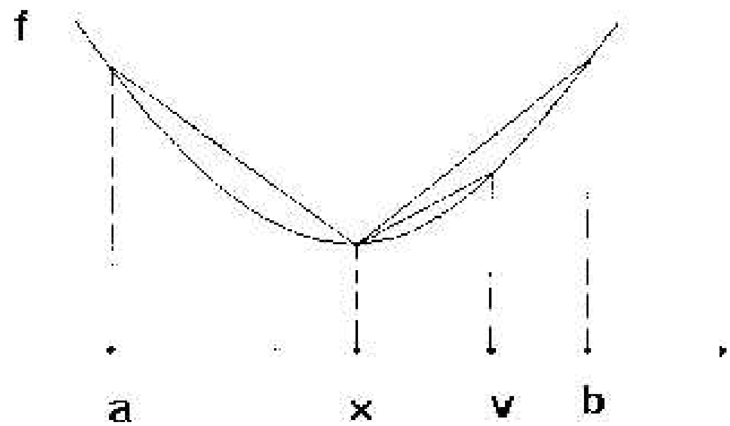

FIGURA 2.

resulta que (véase la figura 2):

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(v)-f(x)}{v-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}\,.$$

Las desigualdades anteriores las podemos expresar como:

$$f(x)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,(v-x) \leq f(v) \leq f(x)+\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\,(v-x).$$

Por lo tanto, $\lim_{v\downarrow x} f(v)=f(x)$. De manera análoga (usando ahora (2) y (3)), resulta que $\lim_{v\uparrow x} f(v)=f(x)$. Así la continuidad de f en x.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bartle, R. y D. R. Sherbert, *Introducción al análisis matemático de una variable*, Limusa, 1996.
[2] Spivak, M., *Cálculo infinitesimal*, Ediciones Repla, S. A., 1988.