El área de la esfera: un argumento heurístico

Alfinio Flores Peñafiel
Arizona State University

Introducción

Aproximar la superficie de la esfera por medio de conos truncados no es desde luego algo nuevo. Arquímedes [1] utilizó conos inscritos y excritos para mostrar que el área de la esfera es igual a cuatro veces el área de su círculo máximo, o en notación moderna $4\pi r^2$. Este valor resulta ser igual al área del cilindro (sin tapa) que envuelve a la esfera $(2\pi r \times 2r)$, un resultado que muchos estudiantes encuentran sorprendente. Aquí utilizaremos conos truncados de forma distinta a la de Arquímedes para ver que el área de la esfera y la del cilindro que la envuelve son iguales.

Un caso especial

Considera el cono truncado que es tangente a la esfera a lo largo del paralelo 30 y queda comprendido entre dos planos paralelos, uno a través del ecuador, y otro tangente al polo (véase la figura 1). El círculo de tangencia queda exactamente a la mitad entre el borde superior del cono y el borde inferior. Dicho de otra forma, la sección transversal del cono queda dividida en dos partes iguales por el punto de tangencia (nota que no es el caso para el arco de la sección de la esfera). El área del cono truncado está dada por el producto de la longitud del segmento generador por la circunferencia del círculo medio (en este caso el círculo de tangencia), esto es,

$$\frac{r}{\cos 30^\circ} \times 2\pi r \cos 30^\circ = 2\pi r^2.$$

Esto es igual al área de la mitad del cilindro que envuelve a la esfera $r \times 2\pi r$. La longitud mayor del segmento generador en relación a la altura del cilindro queda compensada por la menor circunferencia del círculo de tangencia en relación a la circunferencia del cilindro exactamente en la misma proporción.

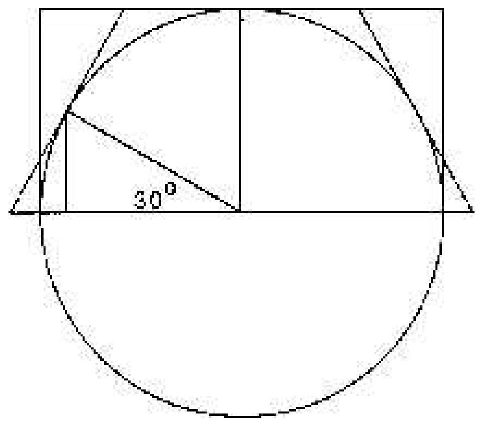

Figura 1. Cono tangente en el paralelo 30.

Aproximar a la esfera por medio de conos

La superficie de la esfera y el cilindro que la envuelve se cortan por planos paralelos al ecuador. Las bandas de la esfera así formadas se aproximan por conos truncados comprendidos entre los planos de modo que precisamente el círculo medio del cono sea tangente a la esfera. La figura 2 muestra las secciones transversales de dos conos entre planos paralelos con una distancia z entre los planos. A diferencia de los conos excritos utilizados por Arquímedes, los conos utilizados aquí no tienen generadores de la misma longitud, ni embonan exactamente unos con otros. El cono que aproxima la sección de la esfera alrededor del polo no la "cubre" muy bien, pero esto no causará ningún problema.

La ventaja de este método, es que permite ver que el área de cada uno de estos conos truncados es igual al área de la banda del cilindro que envuelve

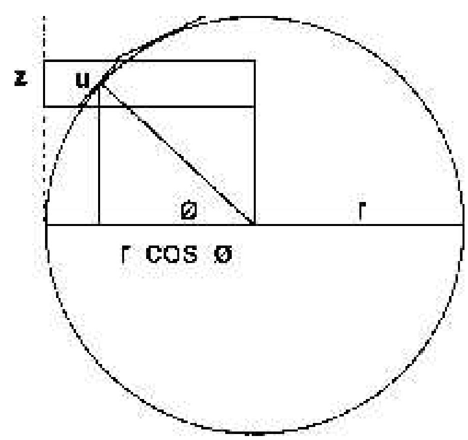

Figura 2. Sección transversal.

a la esfera que se obtiene por proyección axial (misma propiedad que el caso particular anterior). La longitud del generador u del cono que es tangente a lo largo del paralelo de latitud ϕ está dada por $u = z/\cos\phi$. El radio del círculo de tangencia está dado por $r\cos\phi$, por lo que la circunferencia media del cono truncado mide $2\pi r\cos\phi$ y el área del cono es:

$$\frac{z}{\cos\phi} \times 2\pi r\cos\phi = z \times 2\pi r,$$

que es precisamente el área de la banda correspondiente del cilindro. La suma de las áreas de los conos truncados construidos con este método, sin importar el número, es siempre igual al área del cilindro que es $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Si incrementamos el número de planos y hacemos la distancia entre ellos menor cada vez, los conos truncados aproximarán mejor y mejor la superficie de la esfera. Por tanto el área de la esfera es también igual a $4\pi r^2$. El lector interesado puede también consultar [2] para un argumento heurístico ligeramente distinto.

Referencias

[1] Archimedes, *The works of Archimedes*, T. L. Heath (editor), Dover Publications, Nueva York, 1953.

[2] Melzak, Z. A., *Companion to Concrete Mathematics*, Wiley, Nueva York, 1973.