Enseñanza

Sobre la imposibilidad de la representación conforme de la totalidad del plano euclidiano sobre una superficie de curvatura negativa constante

Leonardo Solanilla

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Tulane, Nueva Orleans, LA, EUA

A l'inverse des surfaces á courbure positive et non infiniment petite, lesquelles sont toujours fermées, les surfaces dont il est question actuellement ont nécessairement des nappes infinites. Cette proposition s'établit immédiatement en remarquant que si la cordonée x, par example, avait un maximum ou un minimum en un point de la surface, la courbure en ce point serait positive.

HADAMARD *en* Les surfaces á courbures opposées et leur lignes géodesiques.

RESUMEN

En una comunicación anterior de esta revista [10], hemos visto que si (S, g) es una variedad riemanniana bidimensional cuya métrica se deforma conformemente de acuerdo con una ley de la forma $e^u g$, entonces la curvatura k de la métrica inicial g y la nueva curvatura K de la métrica $e^u g$ se relacionan por medio de la ecuación elíptica no-lineal:

$$\Delta_g u + Ke^{2u} = k \quad \text{en} \quad (S, g).$$

Como primer y más inmediato ejemplo, en aquella comunicación usamos la proyección estereográfica para construir una funcion u que satiface esta ecuación para en el caso $k \equiv 0$ y $K \equiv 1$. Dicha solución corresponde pues a una de las posibles representaciones conformes del plano euclidiano sobre la esfera unitaria (problema cartográfico inverso).

En esta ocasión, queremos abordar el problema análogo para una superficie de curvatura negativa constante, digamos $K \equiv -1$. Con más precisión, nos preguntamos: ¿Existe alguna deformación conforme de la métrica euclidiana δ_{ij} sobre todo el plano tal que la función de curvatura de la métrica inducida por la deformación sea una constante negativa? La respuesta es que no existe tal deformación. A continuación damos dos demostraciones diferentes de este hecho y mostramos una manera de mejorar este resultado. Así, en particular, no es posible representar todo el plano euclidiano sobre una superficie de curvatura negativa constante mediante una transformación conforme.

Este hecho no debe sorprendernos porque la geometría diferencial clásica enseña que todo intento de dar curvatura negativa constante a *todo* el plano euclidiano está condenado a producir singularidades (las "*nappes infinies*" de Hadamard). Por el contrario, hay varias maneras claras de "cerrar" el plano sobre sí mismo para darle curvatura positiva constante. Estas dos afirmaciones se revelan con claridad cuando recordamos la fórmula de Euler: la curvatura de una superficie se puede escribir localmente como el producto de los recíprocos multiplicativos de dos radios, los llamados *radios de curvatura*. En el caso de curvatura positiva los centros desde los cuales dichos radios son medidos están siempre ubicados al mismo lado de la superficie, mientras que en el caso de curvatura negativa tales centros se localizan en lados opuestos. De aquí se desprende la demostración de Hadamard [3] que sirve de nota introductoria al presente artículo. Para una explicación detallada del asunto véase, por ejemplo, Struik [11].

A. Valor medio y convexidad de la función exponencial

La primera demostración que presentamos es nuestra versión de la prueba dada por Wittich a una conjetura que Rellich formulara durante los amargos días de la segunda Guerra Mundial [14]. Clásica y por lo tanto analítica, esta prueba por contradicción investiga el comportamiento del valor medio de una solución hipotética sobre circunferencias concéntricas haciendo uso de la convexidad de la función exponencial.

Sea pues u una *solución clásica* (es decir, con derivadas continuas hasta el segundo orden por lo menos) de nuestra ecuación en $(\mathcal{R}^2, \delta_{ij})$ con $k \equiv 0$ y $K \equiv -1$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2u} \tag{1}$$

Usemos coordenadas polares (ρ, θ) alrededor de un punto arbitrario u origen. Nos interesa el comportamiento de la función valor medio

$$m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \qquad \rho > 0$$

a medida que $\rho \to +\infty$.

En el siguiente caso de la primera fórmula de Green

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \Delta u \rho \, d\rho d\theta = r \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\, d\theta,$$

en el círculo de radio r, sustituimos la ecuación (1):

$$r \frac{dm}{d\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r e^{2u} \rho \, d\rho d\theta,$$

de donde m es una función creciente de ρ. Ahora dejemos que r crezca y sea nuestra variable independiente. Derivando con respecto a r y como e^{2u} es convexa:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dm}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2u}\, d\theta \geq e^{2m}.$$

Con el fin de simplificar esta desigualdad diferencial, hagamos el siguiente cambio de variables, que debe ser entendido propiamente como la transformación conforme que más conviene al problema:

$$t = \log r, \quad \mu(t) = m(r), \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dt} = r \frac{dm}{dr}.$$

Por lo tanto, la última desigualdad se convierte en

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} = r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dm}{dr} \right) \geq e^{2t} e^{2\mu} \geq e^{2t_0} e^{2\mu},$$

para cierto valor fijo de $t_0 \leq t$. También nos damos cuenta de que m es convexa en $\log r$.

De aquí podemos obtener información sobre la energía de μ. Intuitivamente, podemos imaginar una especie de energía “elástica” asociada al “estiramiento” de la deformación. El lector familiarizado con el cálculo de variaciones podrá imaginar que la definición correcta de esta energía está dada por el funcional cuya ecuación de Euler–Lagrange es precisamente la ecuación que relaciona k con K. Una interpretación parecida se puede consultar en Chebyschev [2] y Milnor [6].

Multiplicando la desigualdad de arriba por $2d\mu/dt > 0$, encontramos

$$2\frac{d\mu}{dt}\frac{d^2\mu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 \geq 2e^{2t_0}e^{2\mu}\frac{d\mu}{dt}.$$

Así pues, es posible fijar una $t_1 \geq t_0$ tal que

$$\left(\frac{d\mu}{dt}(t)\right)^2 - \left(\frac{d\mu}{dt}(t_0)\right)^2 \geq 2e^{2t_0}\int_{\mu(t_1)}^{\mu(t)} e^{2\mu}\, d\mu.$$

En vista de que el lado derecho es positivo,

$$\frac{d\mu}{dt}(t) \geq \sqrt{ae^{2\mu(t)} + b}$$

para toda $t \geq t_1$, donde a y b son constantes. De nuevo, hay cierta $t_2 \geq t_1$ tal que

$$t - t_2 \leq \int_{\mu(t_1)}^{\mu(t)} \frac{d\mu}{\sqrt{ae^{2\mu} + b}} \leq \int_{\mu(t_1)}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{ae^{2\mu} + b}}$$

y así,

$$t \leq t_2 + \int_{\mu(t_1)}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{ae^{2\mu} + b}},$$

para toda $t \geq t_2$. Finalmente, como μ es siempre creciente, la integral es convergente y t tiene una cota superior. Es decir, el dominio de existencia de μ y, por lo tanto, de la solución u es acotado. Pero esto contradice nuestra suposición inicial y demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1. *La ecuación*

$$\Delta u = e^{2u} \quad \text{en} \quad \mathcal{R}^2$$

no posee ninguna solución clásica.

B. Una consecuencia del lema de Schwarz

Hay por lo menos otra forma de demostrar que el plano euclidiano se "agota" antes de "cubrir" totalmente una superficie de curvatura negativa constante por medio de una transformación conforme. Esta segunda demostración halla su inspiración en el lemma de Schwarz, tal como se estudia en el cálculo de la variable compleja [8]. Sin embargo, para preservar la unidad de forma y contenido, aquí vamos a presentar el asunto en términos de las dos variables reales que definen la variable compleja $z = x + iy$.

En primer lugar, buscamos una deformación conforme de cualquier círculo euclidiano $\sqrt{x^2 + y^2} < r$ (entendido como variedad riemanniana), $r > 0$ fija, sobre una variedad riemanniana de curvatura negativa que como conjunto coincide con el plano. Para hacer las cosas fáciles, busquemos una deformación que tenga simetría radial. Usemos $\rho \in [0, r)$ para el círculo, $\sigma \in \mathcal{R}^+$ para el plano y requeramos que el escalamiento $s > 0$ de la transformación satisfaga

$$s = \frac{d\sigma}{d\rho} = \frac{2r}{r^2 - \rho^2}; \qquad \sigma(0) = 0, \quad \text{es decir,} \quad \sigma = \log \frac{r + \rho}{r - \rho}.$$

Como era de esperarse, escribimos

$$U = \log s = \log 2r - \log(r^2 - \rho^2). \tag{2}$$

En vista de que

$$\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} = \frac{2}{r^2 - \rho^2} \quad \text{y} \quad \frac{d^2U}{d\rho^2} = \frac{2r^2 + 2\rho^2}{(r^2 - \rho^2)^2},$$

obtenemos

$$\Delta U = \frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho} = \frac{4r^2}{(r^2 - \rho^2)^2} = e^{2U}$$

en el círculo abierto de radio r. El “plano” imagen de la deformación no es euclidiano pues su curvatura es $\equiv -1$ y se conoce como *plano hiperbólico*.

Ya con esto podemos abordar la prueba de la siguiente versión geométrica [1] del siguiente lema.

Lema de Schwarz-Pick. *Si la función infinitamente diferenciable K satisface*

$$K \leq -1 < 0$$

en el círculo de radio $r > 0$, entonces $U = \log \frac{2r}{r^2 - \rho^2}$ es mayor o igual que cualquier solución clásica de la ecuación

$$\Delta u + K e^{2u} = 0 \tag{3}$$

en el círculo abierto de radio $r > 0$. Esto quiere decir que si u es una solución clásica de esta ecuación, entonces $U(p) \geq u(p)$ en cada punto p de dicho círculo.

Demostración. Designemos por B_r el círculo abierto de radio r. Restando $\Delta U = e^{2U}$ de

$$\Delta u = -Ke^{2u} \geq e^{2u}$$

logramos

$$\Delta(u - U) \geq e^{2u} - e^{2U} \quad \text{en} \quad B_r.$$

Definamos $V = \{(x, y) \in B_r : u(x, y) > U(x, y)\}$ con el fin de que

$$\Delta(u - U) > 0 \quad \text{en} \quad V$$

o $u - V$ es una función subharmónica en V. El principio del máximo dicta entonces que $u-U$ alcanza su *supremum* en ∂V. Sin embargo, $\partial V \cap \partial B_r \neq \emptyset$ porque U tiende a $+\infty$ cuando $(x, y) \to \partial B_r$ pero también deberíamos tener $|u - U| \to 0$ a medida que $(x, y) \to \partial V$. La contradicción implica que V es vacío. $\mathcal{Q.E.D.}$

Recurriendo a la intuición, este lema nos dice que la solución U, que "ingenuamente" encontramos arriba, arroja el máximo estiramiento posible de un círculo euclidiano cuando queremos deformarlo para que tenga curvatura ≤ -1. Las solución general de la ecuación (3) en un círculo, la justificación a nuestra "ingenuidad" en la selección de una solución particular y mucho más se puede consultar en Vekua [12, 13].

Corolario. *Teorema 1*, es decir, no es posible deformar conformemente el plano euclidiano para darle curvatura negativa constante.

Demostración. Sea u una solución clásica de $\Delta u = e^{2u}$ en el plano. El lema implica $u(p) \leq U(p) = \log(2/r)$ en cada círculo de radio r centrado en p. Si hacemos que $r \to +\infty$ encontraríamos que u tiende a $-\infty$ en todo el plano. Pero esto no arroja ninguna solución al problema. $\mathcal{Q.E.D.}$

C. Refinamiento

De la observación cuidadosa del factor $r^2 = e^{2t}$ que aparece recurrentemente en las dos pruebas anteriores, es posible establecer una condición asintótica para la inexistencia de deformaciones conformes del plano $(\mathcal{R}^2, \delta_{ij})$ [9]:

Teorema 2. *Si K es una función infinitamente diferenciable definida en el plano (x, y) y*

$$K \leq -r^{-2} < 0$$

para $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq$ *que cierta* $r_0 > 0$*, entonces la ecuación*

$$\Delta u + Ke^{2u} = 0 \quad \textit{en} \quad \mathcal{R}^2$$

no tiene soluciones clásicas.

Sinopsis de dos demostraciones. a) Basta repetir palabra por palabra la primera demostración. Sin embargo, ahora

$$\frac{d^2\mu}{dt^2} \geq e^{2\mu},$$

para $t \geq \log r_0$. De este modo, el resto sigue más fácilmente que antes.

b) Notemos que $U = \log 2 - \log(r^2 - \rho^2)$ es una solución de $\Delta u + r^2 e^{2u} = 0$ en el círculo de radio r y extendamos el lema de Schwarz-Pick para incluir el caso $K \leq -r^2 < 0$. Un argumento similar al del corolario muestra la validez de nuestra afirmación.

En particular, la más negativa de las constantes que el plano acepta como curvatura es $K \equiv 0$, o sea, el teorema 1 es una consecuencia del teorema 2. El lector con experiencia notará sin duda que el teorema 1 es una parte de un conocido teorema de uniformización para variedades riemannianas bidimensionales. Sin embargo, las demostraciones dadas aquí son mucho más sencillas que la prueba usual del importante teorema. Más aún, el teorema 2 abre la posibilidad de obtener resultados más generales de uniformización en los cuales K no está restringida a ser una constante.

En verdad, las ideas presentadas en este artículo constituyen el punto de partida de los desarrollos posteriores de la teoría en el caso de curvatura negativa. El lector interesado en el tema encontrará que el conocimiento de los teoremas 1 y 2 ilumina el estudio de los resultados más recientes de Ni [7], McOwen [5] y Hulin–Troyanov [4], entre otros.

Referencias bibliográficas

[1] Ahlfors, L. V., "An Extension of Scharwz's Lemma", *Transc. Am. Math. Soc.* **43** (1938), pp. 359–364.

[2] Chebyschev, *Sur la construction des cartes géographiques*, Chelsea, Nueva York, 1856, pp. 233–247.

[3] Hadamard, J., *Œuvres*, Centre National de la Recherche Scientifique, París, 1968, pp. 729–775.

[4] Hulin, D., y M. Troyanov, "Prescribing Curvature on Open Surfaces", *Math. Ann.* **293** (1992), pp. 277–315.

[5] McOwen, R., “On the Equation $\Delta u + ke^{2u} = f$ and Prescribed Negative Curvature in $\mathcal{R}^2$”, *J. Math. Anal. Appl.* **103** (1984), pp. 365–370.
[6] Milnor, J., “A Problem in Cartography”, *Am. Math. Month.* **76** (1969), pp. 1101–1112.
[7] Ni, W-M., “On the Elliptic Equation $\Delta u + k(x)e^{2u} = 0$ and Conformal Metrics with Prescribed Gauss Curvature”, *Invent. Math.* **66** (1982), pp. 343–352.
[8] Remmert, R., *Theory of Complex Functions*, Springer, Nueva York, 1991, p. 270.
[9] Sattinger, D. H., “Conformal Metrics in $\mathcal{R}^2$ with Prescribed Curvature”, *Indiana Univ. Math. J.* **22** 1 (1972), pp. 1–4.
[10] Solanilla, L., “Sobre la formulación del problema de prescibir la curvatura de una variedad riemanniana bidimensional”, *Eureka* **13** (1998), pp. 45–52.
[11] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading, 1950.
[12] Vekua, I. N., “Zamečniya o svoĭstvah rešeniya uravneiya $\Delta u = -2Ke^u$” (ruso), *Sibirskiĭ Matem. Žurnal* **1** 3 (1960), pp. 331–342.
[13] Vekua, I. N., “O nekotoryh svoĭstvah rešeniĭ uravneiya GAUSSa” (ruso), *Trudy Matem. Inst. Steklovb* **64** (1961), pp. 5–8.
[14] Wittich, H., “Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$”, *Math. Zeitschrift* **49** (1944), pp. 579–582.

Agradecimientos

Muy especial a la señorita Olga V. Melkazerova en la ciudad de Madison por su amable colaboración en la traducción al inglés del elegante Vekua, I. N., *O nekotoryh svoĭstvah rešeniĭuravneiya GAUSSa*.

Muchas gracias al árbitro de *EUREKA* cuyas amables sugerencias han servido para mejorar sustancialmente este artículo.