Problemas a la carta

Alfinio Flores Peñafiel*
y
Nora G. Ramírez**

* Arizona State University
** Maricopa Community Colleges

RESUMEN

Se presentan cinco problemas que pueden ser resueltos mediante la utilización de materiales concretos: dibujos, tablas, y la observación de patrones numéricos. Los problemas son equivalentes desde el punto de vista matemático, pero el contexto de cada problema puede sugerir métodos diferentes de solución. Los alumnos pueden comparar diferentes estrategias y transferir el método de solución de un problema a otro.

El menú de problemas

Se presenta el siguiente menú de problemas a los alumnos, quienes trabajan en equipos de tres o cuatro sobre alguno de ellos. Al terminar un problema, los equipos pueden escoger otro. Una vez que todos los grupos han terminado de resolver un problema, se comparten estrategias y soluciones.

1) *Los edificios.* Una compañía constructora construye edificios de oficinas modulares en la forma siguiente:

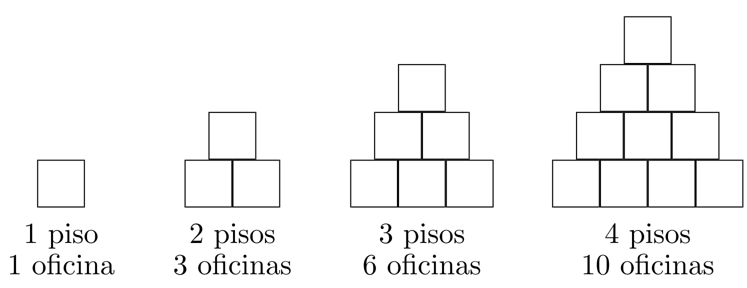


FIGURA 1.

¿Cuántas oficinas tendrá un edificio de siete pisos? ¿Será posible construir un edificio de esta forma que tenga exactamente 34 oficinas?

2) *Los helados.* ¿Cuántas combinaciones de helados dobles y sabores distintos hay si en la nevería tienen cinco sabores? Los helados dobles se sirven en conos dobles (véase la figura 2), por lo que las combinaciones *sabor 1–sabor 2* y *sabor 2–sabor 1* son idénticas. Haz una tabla para diferentes números de sabores. ¿Cuántas combinaciones son posibles si hay 34 sabores?

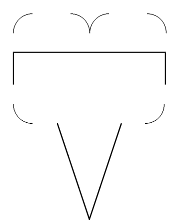


FIGURA 2.

3) *Los apretones de manos.* En un grupo hay ocho personas y todas se saludan de mano. ¿Cuántos apretones de mano se intercambiaron? ¿Cuántos apretones de mano se dan en un grupo de 24 personas donde todas se saludan de mano?

4) *Segmentos entre puntos.* ¿Cuántos segmentos rectos se pueden trazar que unan 10 puntos (por pares)? (figura 3) ¿Cuántos segmentos se pueden trazar si hay 20 puntos?

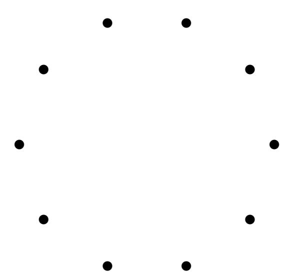


FIGURA 3.

5) *Suma de números sucesivos.* El maestro deja como tarea sumar los siguientes números:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100.$$

¿Cuánto da la suma? ¿Cuál será la suma si el último número de la serie es 200?

Soluciones

El contexto de cada problema sugiere formas diferentes de resolver cada uno. Los alumnos pueden modelar el problema con objetos concretos, tabular, buscar patrones, o resolver casos más sencillos. Cada problema se puede resolver de muchas formas. A continuación se discute cada problema.

1) Los edificios

Los edificios se pueden modelar con cubos de madera para luego contarlos. Los alumnos pueden observar que el segundo edificio tiene dos oficinas en la planta baja, el tercero tiene tres y, en general, el n-ésimo tiene n. Los alumnos también pueden tabular el número de pisos y el número de oficinas.

De la forma en que están hechos los edificios, o bien de la tabla, se puede observar que el número de oficinas para un edificio de n pisos es igual al número de oficinas para un edificio de $(n-1)$ pisos más n oficinas en la planta baja, por lo que

$$f(n) = f(n-1) + n. \tag{1}$$

Otra manera de expresar esta relación es anotando las diferencias entre un edificio y el anterior:

Pisos	*Oficinas*	*Diferencias*
1	1	
2	3	2
3	6	3
4	10	4
5	15	5
6	21	6
7	28	7
8	36	8

Si contamos el número de oficinas en cada piso y sumamos, vemos que el total de oficinas en un edificio de n pisos es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Si modelamos los edificios con cuadrados y los acomodamos de otra manera, podemos ver que el número total de cuadros es igual al área del triángulo grande más las áreas de los n triángulos pequeños (figura 4).

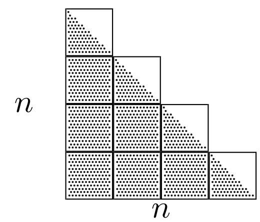


Figura 4.

Acomodando dos edificios sucesivos podemos formar un cuadrado de lado n (figura 5). De aquí se observa que

$$f(n) + f(n-1) = n^2. \tag{2}$$

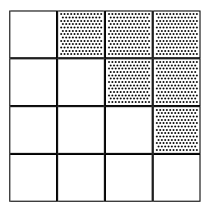


Figura 5.

Combinando las relaciones (1) y (2), obtenemos

$$2f(n) = n^2 + n \quad \Rightarrow \quad f(n) = \frac{n^2+n}{2}\,.$$

Acomodando dos edificios iguales (figura 6), obtenemos que el número de cuadrados en el rectángulo es dos veces el número de oficinas en cada edificio:

$$2f(n) = n(n+1).$$

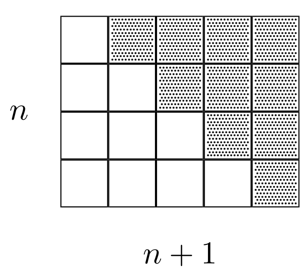


Figura 6.

2) Los helados

Una forma de resolver este problema es mediante el siguiente razonamiento: la primera bola de helado se puede escoger de entre cinco sabores; la segunda (como tiene que ser distinta) de entre cuatro. De este modo, hay 5×4 combinaciones, incluyendo las combinaciones idénticas *sabor 1–sabor 2* y *sabor 2–sabor 1*. Por ello, el resultado tendrá que ser: $5 \times 4/2$. El razonamiento es el mismo sin importar cuántos sabores se tengan. Si hay 34 sabores, el total de combinaciones distintas será $34 \times 33/2$. Si hay n sabores, el total de combinaciones será $n \times (n-1)/2$.

Otra forma de resolver el problema es tabulando las combinaciones. Si se denotan los cinco sabores como A, B, C, D y E, las combinaciones posibles serán:

$$\begin{array}{llll} AB & & & \\ AC & BC & & \\ AD & BD & CD & \\ AE & BE & CE & DE \end{array}$$

En la primera columna hay 4, en la siguiente 3, en la que sigue 2 y en la última 1. El total de combinaciones será $4+3+2+1$. El mismo método se puede utilizar para cualquier número de sabores.

3) Los apretones de manos

Este problema también se podría modelar con objetos. La primera persona saluda a siete personas; la segunda saluda a la primera (que ya contamos) y a seis más; la tercera saluda a la primera y a la segunda (que ya contamos), y a cinco personas más, y así sucesivamente. El número total de saludos es por tanto $7+6+5+4+3+2+1 = 28$.

4) Segmentos entre puntos

Como el problema para diez puntos puede ser confuso, por haber demasiadas líneas, se utiliza la estrategia de resolver primero un problema más sencillo, *i.e.*, el problema para cinco puntos. Los segmentos entre los cinco puntos se pueden contar de muchas maneras. Trataremos de hacerlo sistemáticamente para extender el problema a más puntos. Primero contamos todos los segmentos que se pueden trazar desde uno de los puntos:

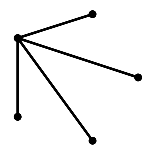


FIGURA 7.

Luego continuamos con aquellos segmentos que se pueden trazar desde un segundo punto, sin contar el segmento de éste hacia el primer punto (que ya está contado):

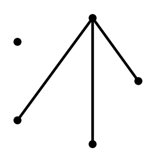


FIGURA 8.

Continuamos con los segmentos que se pueden trazar de un tercer punto, excepto por los trazados de este punto al primero y segundo (que ya se contaron), y así sucesivamente:

FIGURA 9.

Al conectar los puntos de esta manera obtenemos que el número de segmentos es $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Utilizando el mismo razonamiento para n puntos, se obtiene que el número de segmentos será:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \quad \text{es decir} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1).$$

Otra manera de contar los segmentos es la siguiente: cada uno de los cinco puntos puede conectarse con los restantes (figura 10), aunque así contamos dos veces cada segmento. Por lo tanto hay $5 \times 4/2$ segmentos.

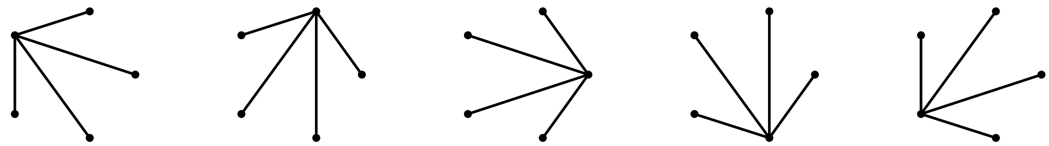


Figura 10.

El mismo razonamiento se aplica para n puntos. Cada uno de los n puntos se puede conectar con los $(n-1)$ restantes, aunque estamos contando dos veces cada segmento. Por eso, en general, el número total de líneas entre n puntos es $n(n-1)/2$.

Este problema se parece al de los apretones de manos. En el contexto de puntos y segmentos, ¿cuáles desempeñan el papel de personas y cuáles el de apretones de manos?

Observa que este problema también se parece al de los helados. Haz explícita la semejanza. ¿Cuáles elementos desempeñan papeles semejantes?

5) Sumas de números sucesivos

Cuando Gauss era pequeño, su profesor le pidió a la clase realizar la suma $1+2+3+\cdots+100$. Gauss utilizó el siguiente razonamiento: $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, y así sucesivamente. Hay 50 parejas de números que suman 101 cada una. El resultado es $101\times 50 = 5\,050$.

En general, usando el mismo razonamiento para sumar $1+2+3+\cdots+n$ (si n es par), se tiene que hay $n/2$ parejas de números que suman $n-1$ cada una, de modo que el resultado final es $(n+1)\times n/2$.

Ejercicio. Modifica el argumento para mostrar la validez de la fórmula en el caso de que n sea impar.

Otra manera de resolver el problema es ordenando los números en la suma de menor a mayor y de mayor a menor, y sumarlos, columna a columna:

$$\begin{array}{crcrcrcccrcr}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\
+ & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Dos veces la suma es 100×101, de donde la suma es $100\times 101/2 = 5\,050$.

Mirada retrospectiva

Las soluciones de los cinco problemas discutidos ilustran uno o ambos lados de la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

Sin embargo, dependiendo del grado de desarrollo matemático de los alumnos, a veces no es necesario llegar a una fórmula para considerar el problema resuelto. Una estrategia valiosa para resolver problemas es considerar casos más sencillos. En los problemas tratados, casos más sencillos son por ejemplo considerar respectivamente menos sabores, menos pisos o menos puntos. Si para un problema consideramos los casos más sencillos de manera sistemática y tabulamos los resultados, podremos observar patrones en la table. Por ejemplo, podemos ver que para obtener el resultado del renglón n, se suma n al resultado del renglón anterior, es decir, podemos resolver el problema iterativamente. Esta es una estrategia muy poderosa en matemáticas, y se puede aplicar a otros problemas donde la fórmula no sea evidente. Los alumnos pueden utilizar la calculadora, una hoja electrónica o un programa de cómputo como *Function Probe* [1] para sumar los números sucesivos de manera rápida. Muchos alumnos están acostumbrados a que en matemáticas la solución de un problema requiere encontrar una fórmula. Es importante que se den cuenta que muchas veces la solución se puede calcular aún cuando no se tenga una fórmula.

A veces los alumnos se dan cuenta que los problemas están relacionados al observar que los números que aparecen en las tablas son los mismos. Dependiendo del método de solución, no siempre expresan el problema como $1+2+\cdots+n$. Algunas veces, los alumnos que llegan a encontrar la solución en esta forma desean continuar y encontrar una fórmula. El problema de los puntos y líneas, y el de los helados, son particularmente propicios para que los alumnos se den cuenta de que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Problemas relacionados

Otros problemas que los alumnos pueden investigar son:

a) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo con diez lados? Una discusión acerca de lo que es una diagonal en un polígono es necesaria (un segmento que une dos vértices no adyacentes).

b) En una cena cada una de las personas que están sentadas a la mesa saluda a las personas que están sentadas a su derecha y a su izquierda. Después de la cena cada quien saluda de mano a aquellas personas que no saludó durante la cena. Si había 24 personas, ¿cuántos apretones de manos se intercambiaron después de la cena?

c) ¿Cuántos tipos de helados dobles se pueden obtener si la nevería tiene cinco sabores? Se pueden pedir dos bolas del mismo sabor. De nueva cuenta, la combinación *sabor 1–sabor 2* se considera la misma que *sabor 2–sabor 1*.

Extensiones

El método de diferencias sucesivas

Algunos alumnos descubren en la tabla que las primeras diferencias siguen un patrón muy sencillo, las diferencias se van incrementando de uno en uno. Algunos observan que las segundas diferencias son constantes:

n	$f(n)$		
1	1	2	
2	3	3	1
3	6	4	1
4	10	5	1
5	15	6	1
6	21		

Los alumnos pueden observar que la función

$$f(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

es cuadrática. Los alumnos pueden explorar si es que con otras funciones cuadráticas se observa que las segundas diferencias son constantes. Por ejemplo:

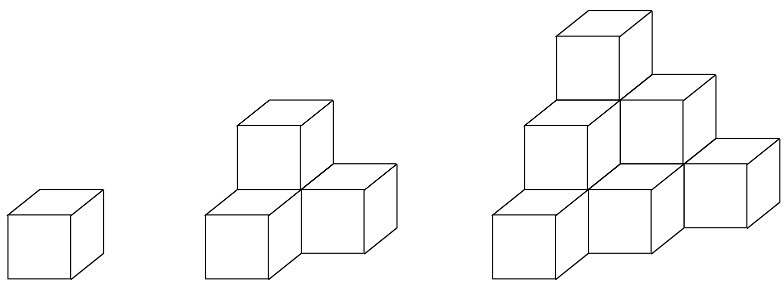
n	$f(n) = n^2$	
1	1	3
2	4	5
3	9	7
4	16	

Los alumnos pueden investigar funciones lineales y darse cuenta que las primeras diferencias son constantes. Los alumnos pueden tratar de encontrar la ecuación de una función donde las primeras diferencias sean constantes a partir de la tabla.

Los alumnos pueden buscar la ecuación de una función donde las segundas diferencias son constantes, dada la tabla; también pueden buscar la relación que hay entre los valores de las diferencias sucesivas y los coeficientes del polinomio.

Problemas más complejos

Los alumnos pueden aplicar las estrategias utilizadas en los problemas anteriores en otros problemas relacionados. ¿Cuántos cubos tiene el décimo término?



primer término 1 cubo | segundo término 4 cubos | tercer término 10 cubos

Figura 11.

Al hacer modelos de los términos sucesivos los alumnos se dan cuenta que cada término se puede obtener del anterior sumando un nuevo piso (o rebanada). El piso tiene precisamente el mismo número de cubos que un edificio del problema 1, que está dado precisamente por la suma $1+2+3+\cdots+n$. Esto es, la diferencia entre los términos está dada por:

$$1 \qquad 3 \qquad 6 \qquad 10 \qquad 15 \qquad 21 \qquad 28 \qquad 36$$

Como también conocemos cuántos cubos tiene el primer término, podemos calcular la solución acumulando las diferencias.

Conclusión

Los autores han trabajado con este menú y otros semejantes tanto con futuros maestros como con maestros de los niveles primario y medio. El hecho de que los participantes trabajen cooperativamente en equipos, y que puedan escoger el problema y los materiales que quieren utilizar para resolverlo ayuda mucho a establecer una atmósfera de confianza en una actividad que muchas veces resulta amenazadora, como es la resolución de problemas. El uso de herramientas tales como las calculadoras permite a los participantes centrarse en el problema en sí, y no distraer su atención en los cálculos. Participar en pequeños grupos además proporciona la oportunidad de practicar la comunicación de ideas matemáticas, tanto de manera verbal como en forma escrita, y mediante el uso de tablas y diagramas.

Referencias

[1] Confrey, J., E. Smith y F. Carroll, *Function Probe* (programa de cómputo), Santa Barbara, California, EUA, 1991.