Enseñanza

Los algoritmos numéricos

José Guerrero Grajeda*

y

Rosa Margarita Álvarez González**

* UNAM, UAQ
** UNAM

RESUMEN

Se define el concepto de algoritmo. Se presentan varios casos de problemas numéricos, se dan sus soluciones en forma algorítmica y se agrega en cada caso una representación en forma de diagrama de flujo.

I. Algoritmos y algoritmos numéricos

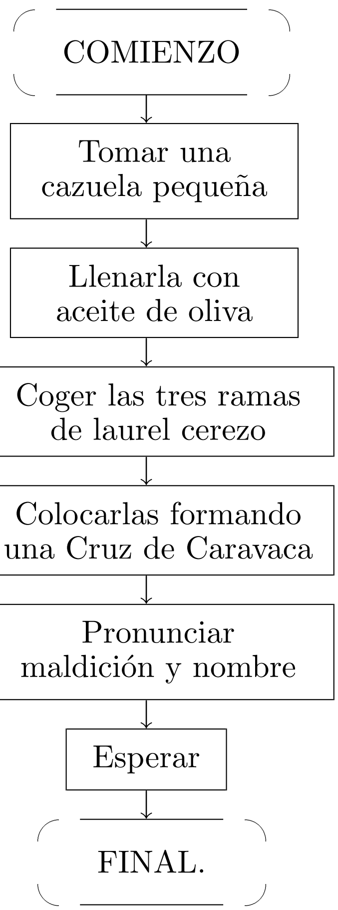
La noción de algoritmo aparece en numerosas y disímiles situaciones de la vida cotidiana y es manejada por una gran cantidad de personas, algunas de las cuales ni tan siquiera conocen su existencia. De manera informal, un algoritmo puede definirse como una lista de instrucciones mediante las cuales puede llevarse a cabo un determinado proceso. Consideremos el siguiente

Ejemplo 1. Descripción algorítmica de un conjuro con el cual se logra perjudicar a una persona no grata

Lista de instrucciones:

1) Tomar una cazuela de tamaño pequeño.
2) Llenarla hasta el borde con aceite de olivas.
3) Coger, a la hora de Saturno, tres ramas de laurel cerezo y colocarlas formando una Cruz de Caravaca sobre la superficie del aceite.
4) Pronunciar con el corazón henchido de odio el perjuicio que quiere causarse, y el nombre de la persona odiada.
5) Esperar el cumplimiento de los efectos del conjuro antes de dos lunas.

Un diagrama que ilustra el algoritmo anterior se da a continuación:



Al igual que para este ejemplo tomado de la "botánica oculta", pueden construirse algoritmos sobre cuestiones tales como: descripción de un trayecto para transportarse de Xochimilco al zócalo, instrucciones a seguir para el canje de placas de un automóvil, el conocidísimo caso de la elaboración de una planilla de alta (o baja) cocina, etcétera.

Bueno, pero ¿qué tiene que ver todo esto con el análisis numérico? Pues bien, resulta que sí tiene que ver, y mucho, dado que la noción de algoritmo forma parte de la vida diaria de todo analista numérico.

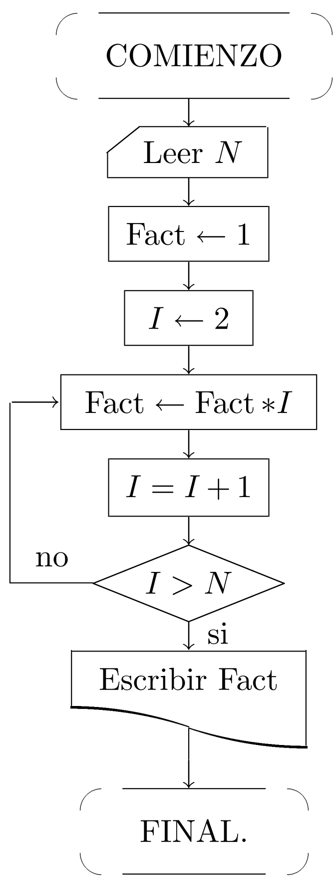
En efecto, sucede que diariamente este individuo maneja algoritmos y, de entre ellos, algunos con características especiales: algoritmos numéricos. Por un algoritmo relativo a un problema numérico nosotros entendemos una lista completa y detallada de operaciones a través de las cuales una colección de datos de entrada se transforma en una colección de resultados (datos de salida). Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2. Algoritmo para el cálculo de $N!$

Lista de instrucciones:

1) Fact $\leftarrow$ 1.
2) $I \leftarrow 2$.
3) Fact $\leftarrow$ Fact $*I$.
4) $I \leftarrow I + 1$.
5) Si $I > N$, continuar; si no ir a *3*).
6) Terminar.

El diagrama asociado en este caso es como sigue:



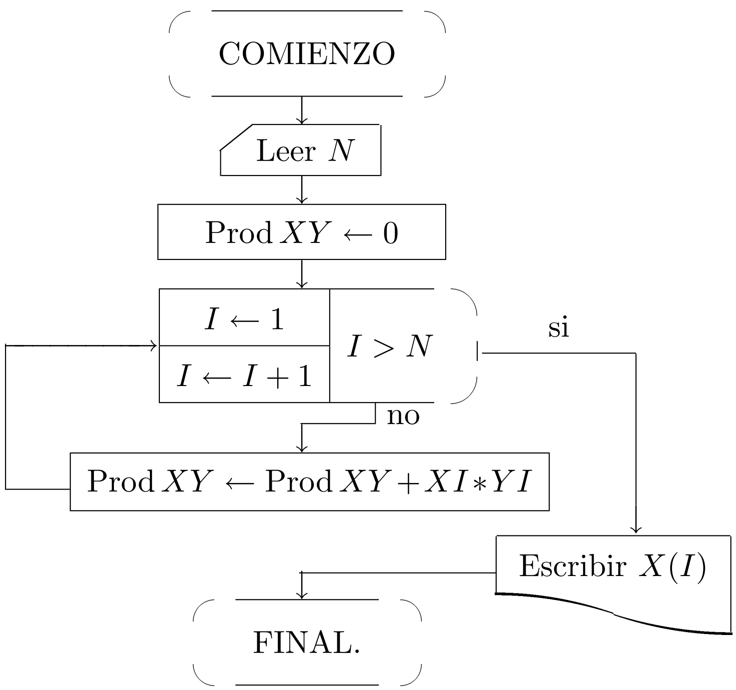
Ejemplo 3. Algoritmo para el cálculo del producto escalar de los vectores

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$$

Lista de instrucciones:

1) Comienzo.
2) Prod $XY \leftarrow 0$.
3) Para $I = 1, 2, \ldots, N$ hacer
  3.1) Prod $XY \leftarrow$ Prod $XY + XI * YI$.
4) Terminar.

Diagrama:



Los siguientes algoritmos son un poco más complicados.

Ejemplo 4. Algoritmo de sustitución hacia atrás

Se trata de un procedimiento usado ampliamente para resolver sistemas de ecuaciones lineales, cuando la matriz del sistema es triangular superior; esto es, cuando el sistema tiene la forma

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= b_1\\
\alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \; &\; \vdots\\
\alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-1,n}x_n &= b_{n-1}\\
\alpha_{n,n}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Es claro que en este caso, x_n puede obtenerse de manera inmediata como sigue:

$$x_n = \frac{b_n}{\alpha_{n,n}}\,,$$

de donde resulta

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \alpha_{n-1,n}x_n}{\alpha_{n-1,n-1}}\,.$$

De manera análoga se obtiene

$$\begin{aligned}
x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - (\alpha_{n-2,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-2,n}x_n)}{\alpha_{n-2,n-2}}\\
\frac{b_{n-2} - \sum_{k=n-1}^{n}\alpha_{n-2,k}x_k}{\alpha_{n-2,n-2}}
\end{aligned}\,.$$

En general se tiene

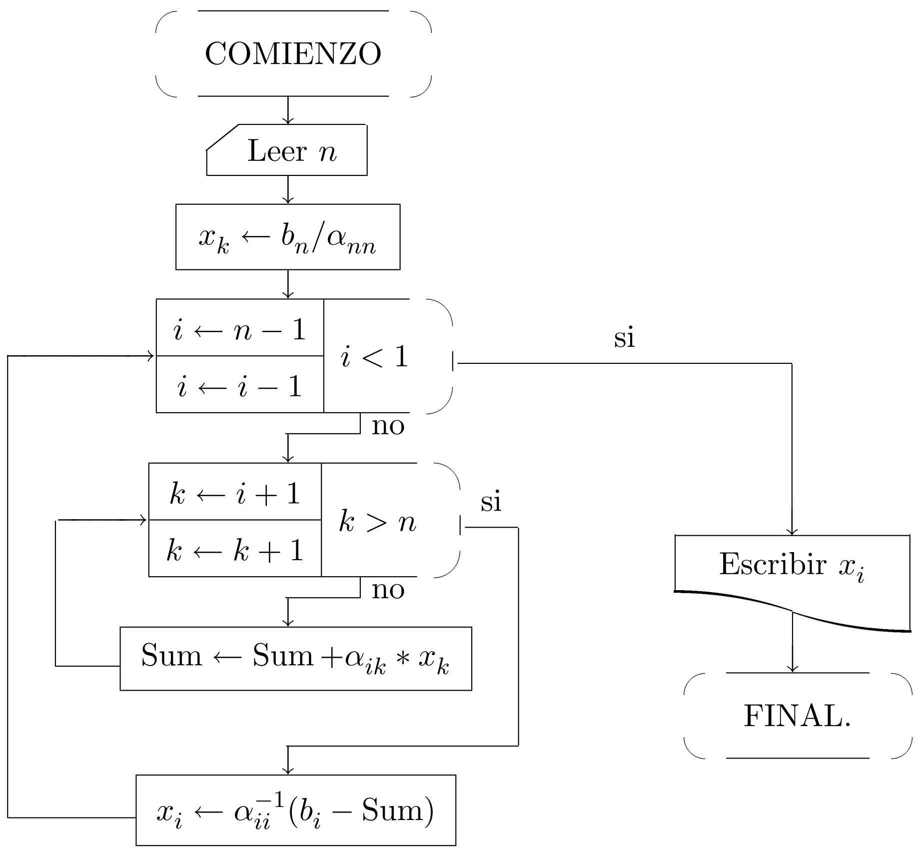
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}x_k}{\alpha_{ii}}\,.$$

Con esto, nuestro algoritmo queda como sigue:

Lista de instrucciones:

1) $x_n = b_n/\alpha_{n,n}$.
2) Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, hacer:
  2.1) $x_i = \alpha_{ii}^{-1}[b_i \sum_{k=i+1}^{n}\alpha_{ik}x_k]$.
3) Terminar.

Tenemos el siguiente diagrama asociado:



Ejemplo 5. Factorización de Horner

El método de Horner para la evaluación de polinomios es ampliamente conocido debido a su eficiencia, y en términos generales consiste en lo siguiente: Evaluar el polinomio

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de tal forma que el número de multiplicaciones efectuadas sea n.

Puede checarse fácilmente que si el polinomio anterior es evaluado en la forma como aparece, el número de multiplicaciones requeridas está dado por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}\,.$$

Para reducir el número de multiplicaciones, lo que Horner propone es factorizar $P(x)$ tantas veces como sea posible, según el siguiente esquema: supongamos que:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= ax^2 + bx + c\\
&\downarrow\\
P_2(x) &= x(ax+b) + c.
\end{aligned}$$

Nótese que solamente son necesarias dos multiplicaciones.

Análogamente, si

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d\\
&\downarrow\\
P_3(x) &= x(ax^2 + bx + c) + d\\
&\downarrow\\
P_3(x) &= x(x(ax+b)+c) + d.
\end{aligned}$$

En este caso, sólo son necesarias tres multiplicaciones para evaluar $P_3(x)$.

En general se tiene

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\\
&\downarrow\\
&\vdots\\
&\downarrow\\
P_n(x) &= x\Big(x(\cdots x(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2})\cdots + a_1\Big) + a_0
\end{aligned}$$

con un total de n multiplicaciones en la evaluación de $P_n(x)$.

Obsérvese que en la práctica, el método se Horner se reduce a calcular términos de la forma

$$bx + a,$$

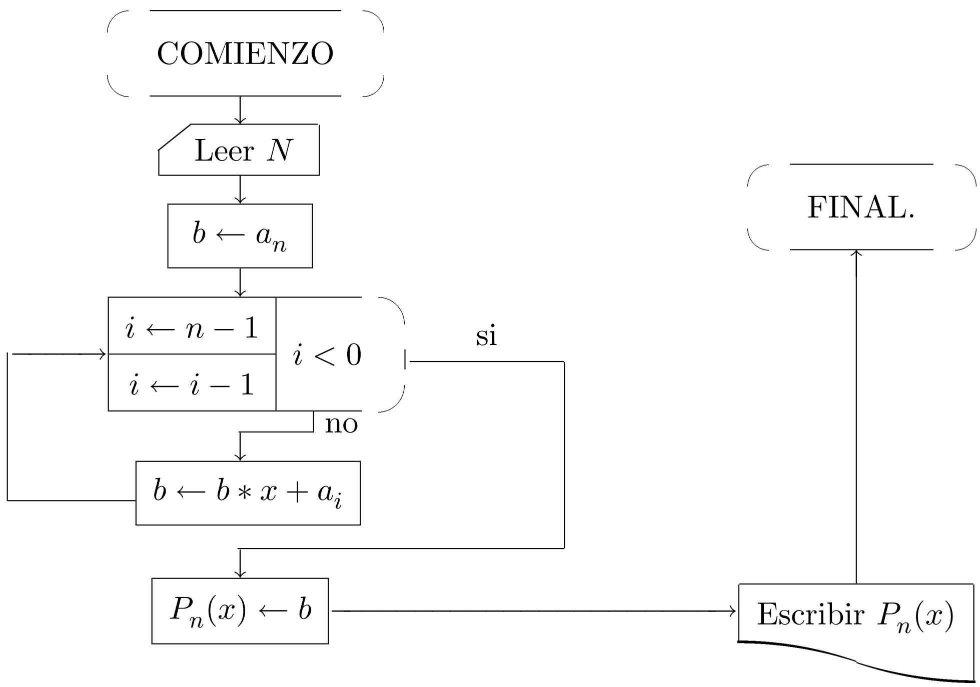
donde a es un coeficiente de $P_n(x)$ y b es obtenido como un término de la misma forma anterior.

De nuestra discusión resulta finalmente el algoritmo para evaluar $P_n(x)$ con sólo n multiplicaciones.

Lista de instrucciones:

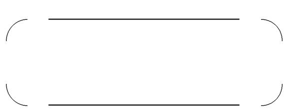
1) $b \leftarrow a_n$.
2) Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$, hacer:
  2.1) $b \leftarrow b * x + a_i$.
3) $P_n(x) \leftarrow b$.

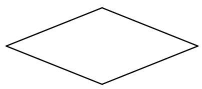
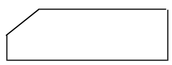
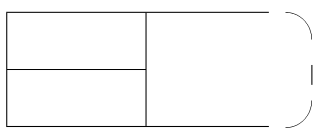
Damos en seguida un diagrama representativo:



II. Diagramas de flujo

Un diagrama de flujo es la representación gráfica de un algoritmo; en la primera parte hemos construido varios de ellos. Por lo que toca a las figuras que en ellos intervienen, su interpretación es la siguiente:

FIGURA	SIGNIFICADO
	Comienzo, final.

	Comando u orden de ejecución de una acción.
	Bifurcación.
$\longrightarrow$	Dirección de flujo.
	Lectura.
	Escritura.
	Iteración.

Referencias

[1] Aho, A. V., J. E. Hopcroft y J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, EUA, 1975.
[2] Knuth, D. E., *Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, EUA, 1975.
[3] ———, *Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, EUA, 1969.