Opciones para ciertos riesgos

Eric J. Avila–Vales†

Universidad Autónoma de Yucatán

Agosto de 1998

1. Introducción

Para proteger a nuestra familia compramos un seguro de vida y/o un seguro de gastos médicos. El costo de esa protección se calcula con base en ciertas probabilidades. Ahora bien, consideremos las siguientes situaciones dentro del mundo empresarial: imaginemos que el presidente del consejo de administración de una fábrica planea preparar su presupuesto para los próximos dos años. Los insumos de esta fábrica son importados por lo que, obviamente, se pagan en dólares. Las proyecciones del gobierno son que dentro de dos años el dólar, a lo más, costará 10% más de lo que cuesta hoy. Para no excederse de su presupuesto, al dirigente empresarial le gustaría que el dólar no llegara a costar más de lo proyectado; algo que sí le gustaría a este ejecutivo sería aprovechar los precios más baratos del dólar. Otro ejemplo sería el del inversionista que detecta que el valor de ciertas acciones subirán, pero que no quiere arriesgarse demasiado con tal ganarse una buena ganancia.

¿Qué instrumentos financieros están disponibles para resolver las situaciones anteriores? Existen dos opciones: la europea y la americana. La diferencia entre ambas no es su procedencia sino cuándo se ejerce una de ellas. Hablemos un poco de la europea, que a su vez se divide en dos: *call* y *put*. Así, una opción *call* (opción *put*) es el derecho a comprar (o vender) el objeto financiero principal de la opción, en un cierto tiempo t, a un precio previamente determinado. La opción americana se ejerce en cualquier momento entre el intervalo en que se firma el contrato y el plazo establecido. La figura 1 muestra la gráfica de la ganancia de las opciones *put* y *call* contra el precio del objeto financiero principal.

†C–224 #103 × 17 y 19, Fracc. Xcumpich, Mérida, Yucatán, México.
avila@tunku.uady.mx

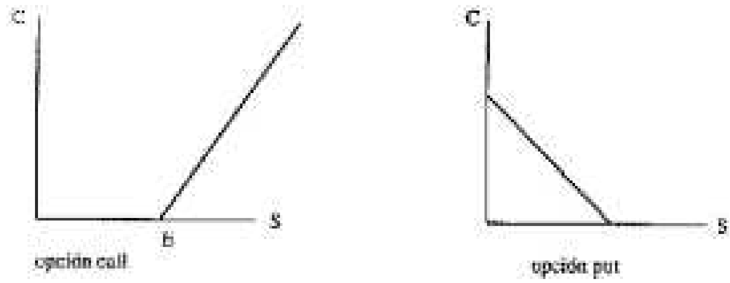

Figura 1.

Obviamente esta protección no es gratuita. El que compra debe compensar al que vende, y surge así la siguiente pregunta: ¿cuánto cuestan las opciones?

Este problema no había recibido una solución satisfactoria. Fue en 1973 cuando Fisher Black y Myron Scholes publicaron una fórmula para encontrar el precio de la alternativa europea; Merton también contribuyó para la solución del problema. Por sus contribuciones, Scholes y Merton recibieron el premio Nobel de economía (desafortunadamente Fisher Black murió hace dos años y no pudo recibir este prestigioso premio). Las herramientas usadas para intentar resolver este tipo de problema son métodos e ideas bastante especializados contenidos en el cálculo estocástico y en las ecuaciones diferenciales parciales. En este trabajo presentamos dos fórmulas alternativas a la presentada por Black–Scholes.

2. Proceso discreto

Supongamos que queremos encontrar el precio de una opción europea, en dólares, con vencimiento al tiempo t, con un costo K. El precio de la opción se puede pensar como el pago de una prima para tener el derecho de ejercer la opción al tiempo de vencimiento; este tipo de transacciones se han venido realizando de manera empírica desde hace mucho tiempo. Tratemos de encontrar el precio "justo" de la opción. Primero intentemos hacerlo de manera sencilla pero, de alguna manera, conservando las caracterízticas primarias de los mercados financieros (por ejemplo, la aleatoriedad). No sabemos cuánto valdrá el dólar mañana ni el cambio monetario con respecto al tiempo. Una forma simple de darle aleatoriedad al precio del dólar es que mañana haya dos posibilidades: si el precio hoy es S mañana puede ser uS o dS, donde $d < u$. Supongamos que el precio de la opción es C_u si el tipo de cambio se mueve a uS y C_d si se mueve a dS. Respecto al valor del dinero, consideremos los *cetes*, los cuales nos devuelven mañana ρ pesos (valor nominal más interés) por cada peso que invertimos hoy. Al comprar las dos divisas debemos considerar el valor del dinero en el mercado estadunidense; así, si invertimos un dólar en un bono del tesoro estadounidense obtendremos η dólares al final del período. Es decir, al moverse el dólar a uS, un dólar generaría $u\eta S$. De manera similar generaría $d\eta S$ si el cambio es hacia dS. El precio que tenga la opción debe ser tal que el precio sea "justo" en el sentido de que ningún inversionista aproveche el precio de la opción, sea bajo o alto (no arbitraje). Para garantizar esto necesitamos hacer una réplica del proceso que sufre la opción, pero ¿cómo? Sabemos cómo se comportaría la siguiente combinación de inversiones (portafolio). Nosotros compramos Δ dólares e invertimos B pesos en *cetes*, y así obtendremos un total de $\Delta S + B$ pesos (recuérdese que S es el precio corriente del dólar en pesos). Tendremos dos posibilidaes: si el precio alcanza uS, entonces nuestro portafolio vale $\Delta u\eta S + \rho B$; si llega a dS, terminaríamos con $\Delta d\eta S + \rho B$. La pregunta es, ¿habrá un portafolio Δ y B que se ajuste al valor de la opción en los dos posibles casos?, es decir, ¿podemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones para Δ y B?

$$\Delta u\eta S + \rho B = C_u$$
$$\Delta d\eta S + \rho B = C_d$$

de ser así, el precio de la opción es

$$C = \frac{1}{\rho}(pC_u + (1-p)C_d), \qquad p = \frac{\frac{\rho}{\eta} - d}{u - d}.$$

Obsérvese que p es la probabilidad que replica el precio de la opción de manera justa, por lo que el proceso es limpio. El paso anterior lo visualizamos como una localización del proceso, es decir, lo anterior es sólo una rama del árbol mostrado en la figura 2.

Considerando ahora todos los nodos del árbol para calcular el precio de una opción *call* europea con vencimiento t y precio de ejercicio K, obtenemos la siguiente fórmula de Cox, Ross y Rubinstein (1979) [2]

$$C = S\eta^{-n}\Phi[a; n, p'] - K\rho^{-n}\Phi[a; n, p]$$

donde

$$\Phi[b; m, q] = \sum_{j=b}^{m} \binom{m}{j} q^j (1-q)^{m-j}$$

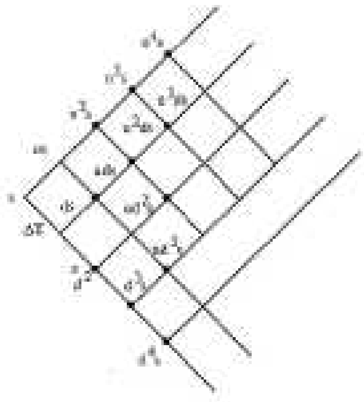

Figura 2.

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\frac{\rho}{\eta} - d}{u - d} \\
p' &= \frac{u^n}{\rho} p \\
a &= \text{la mínima } j \text{ que satisface } u^j d^{n-j} S - K \geq 0.
\end{aligned}
$$

Para el caso de una opción americana (aquí la opción se puede ejercer en cualquier momento entre la fecha de inicio del contrato y la fecha de vencimiento) no se tiene una fórmula de tazar el precio como en la europea, aunque se puede utilizar aquél para calcularlo. Es claro que los mercados financieros no son árboles, es decir, hemos aproximado el movimiento financiero discretizando el proceso financiero para valuar la opción. Necesitamos movernos del proceso discreto al proceso continuo.

3. Proceso continuo

Supongamos que tenemos una opción cuyo valor $V(S,t)$ depende solamente de S, el valor actual de la acción, y de t, el tiempo. Supóngase, además, que el precio de las acciones evoluciona con el tiempo de acuerdo al siguiente proceso estocástico

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dx,$$

el cual se conoce como *movimiento browniano geométrico*. Haciendo uso del lema de Ito (una de las fórmulas fundamentales del cálculo estocástico, que viene a ser una extensión del cálculo clásico o newtoniano), podemos escribir el proceso seguido por la función $V(S,t)$:

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\, dx + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt,$$

Igual que en el caso discreto, podemos tazar el precio de la opción comparándolo con un portafolio apropiado, que elimine la aleatoriedad del movimiento browniano. Esto puede hacerse debido a que S y V están correlacionados; así, nuestro portafolio consiste de una opción y del número de acciones:

$$\frac{\partial V}{\partial S}.$$

El valor del portafolio es:

$$\prod = V - \frac{\partial V}{\partial S} S.$$

El cambio $d\prod$ del portafolio en el tiempo Δt está dado por

$$d\prod = dV - \frac{\partial V}{\partial S}\, dS$$

que combinando con las expresiones de dS y dV nos da la expresión determinista

$$d\prod = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt,$$

ahora bien la ganancia de invertir $\prod$ en bonos sin riesgos sería $r\prod dt$ para un intervalo dt, entonces asumiendo que no existiera *arbitraje* y que no hubieran costos por la transacción, se tendría que

$$r\prod\, dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt.$$

Sustituyendo

$$\prod = V - \frac{\partial V}{\partial S} S$$

en la expresión anterior y dividiendo por t se obtiene la ecuación diferencial de Black–Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Dependiendo del tipo de opción que se quiera evaluar impondremos las condiciones de frontera. Si se tiene una opción *call* con precio de ejercicio E y término de expiración T, al final del período la opción debe valer exactamente $\max(S-E,0)$ cuando $t=T$. En el caso de una opción *put* tendremos que

$$C(S,T)=\max(E-S,0).$$

Así, el valor esperado de la opción a tazas libres de riesgo es

$$C(S,t)=e^{-r(T-t)}\widehat{e}[\max(S-E,0)].$$

Calculando la integral del valor esperado obtenemos que:

$$C(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

donde E es el precio al cual se ejerce la opción,

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x}e^{-(1/2)y^2}\,dy,$$

$$d_1=\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2=\frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En el caso de una opción *put*, el precio es

$$P(S,t)=Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1).$$

Una propiedad de estas funciones es, por ejemplo, que $C(S,T)>C(S,0)$ para cualquier $T>0$. También puede observarse que si $t\to T$, cada una de las funciones $C(S,t)$ y $P(S,t)$ se acerca a su respectiva función de ganancia (véase la figura 2). C y P se relacionan de la siguiente forma:

$$P=C-S+Ee^{r(T-t)}.$$

De acuerdo con las expresiones anteriores, basta utilizar la función exponencial para calcular los precios; sin embargo, en este trabajo puede notarse que hay una teoría rica, interesante y aún en construcción, que requiere gente con conocimientos en cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales parciales, así como en los métodos numéricos de éstas para hacer contribuciones en este campo.

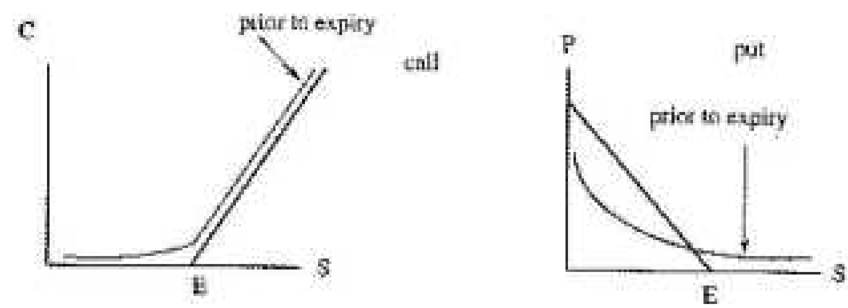

FIGURA 3.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado cuando el autor visitaba el Departamento de Matemáticas de la Universitad de Tulane. Gracias a la Sra. Meredith Mickel por transcribir el manuscrito a TEX.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Baxter, M. y A. Rennie, *Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing* (1996), Cambridge University Press.

[2] Cox, J. C., S. A. Ross y M. Rubenstein, "Option Pricing: A Simplified Approach", *J. Finan. Econ.* **7** (septiembre de 1979), pp. 229–263.

[3] Hull, J. C., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, Second Edition (1993), Prentice-Hall.

[4] Musiela, M. y M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modeling* (1997), Springer.

[5] Wilmott, P., S. Howison y J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives* (1995), Cambridge University Press.