# Sobre la formulación del problema de prescribir la curvatura de una variedad riemanniana bidimensional

Leonardo Solanilla

Departamento de Matemáticas,
Universidad de Tulane, Nueva Orleans, LA, EUA

*Cette question n'a pas encore été résolue et est en elle-même très-difficile, peut-être même impossible à résoudre en géneral; mais pour les besoins de la Géographie...*

LAGRANGE *en* Sur la construction des cartes géographiques

RESUMEN

El problema de encontrar una superficie a partir de una función de curvatura surge naturalmente ante el éxito de la solución del problema clásico del movimiento, es decir, el problema de determinar el movimiento de una partícula puntual a partir de su aceleración. Sin embargo, el primer problema es considerablemente más intrincado que el segundo y se formula generalmente mediante una ecuación a derivadas parciales del tipo Monge–Ampère. Aquí nos limitaremos a formular únicamente una parte del aspecto intrínseco del problema geométrico, es decir, el aspecto que tiene que ver con las cantidades que son "medibles desde la misma superficie". Formalmente, consideramos una variedad riemanniana bidimensional $(V, g)$ y nos preguntamos por las funciones de curvatura que dicha variedad admite. Más aún, restringimos las posibles funciones de curvatura a aquellas que resultan de las deformaciones conformes de la métrica $g$. De esta manera, obtenemos una ecuación diferencial elíptica no-lineal que involucra el operador de Laplace–Beltrami de $(V, g)$.

## A. Cartografía

Si bien algunos historiadores de las matemáticas sostienen que Tolomeo fue el primero en concebir una representación conforme de la superficie terrestre sobre un plano, nuestros conocimientos al respecto vienen de una época más próxima, concretamente, del albor de los tiempos modernos. Sin pretender mencionar a todos los que han contribuido significativamente al asunto, es posible afirmar que las ideas de Nuñez, Mercator, Lambert, Euler y Lagrange sobre navegación y, más concretamente, sobre la elaboración de mapas planos de la superficie del globo terrestre se hallan en el núcleo de nuestra tradición acerca de las transformaciones conformes. Aún en 1856, Chebyschev cree necesario publicar un estudio sobre la elaboración de mapas en Geografía. Todavía más recientemente, en 1969, John Milnor retoma el problema cartográfico y lo reinterpreta a la luz del cálculo de variaciones contemporáneo.

Cuando usamos coordenadas isotérmicas, el elemento lineal en un punto $p$ de nuestra variedad $(V, g)$ se escribe clásicamente $\sqrt{E\,dx^2 + G\,dy^2}$. Si $\varphi\colon V \to V$ es una transformación conforme, el elemento lineal correspondiente en el punto imagen $\varphi(p)$ será, digamos, $\sqrt{H\,dx^2 + J\,dy^2}$ y el escalamiento $s$ producido por $\varphi$ satisface

$$s^2 = \frac{H\,dx^2 + J\,dy^2}{E\,dx^2 + G\,dy^2}\,.$$

Esta relación era ya conocida por Lagrange en 1779.

## B. Geometría diferencial clásica

Al introducir la noción de curvatura de una superficie, Gauss inaugura un nuevo modo de pensar la geometría. En las muy célebres *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), Gauss demuestra que la *mensura curvatura* depende solamente de los coeficientes del elemento lineal (*Theorema Egregium*). Ciertamente, en coordenadas isotérmicas la curvatura $(V, g)$ en $p$ está dada por

$$k(p) = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial y}\right).$$

De esta manera,

$$K(p) = K(\varphi(p)) = -\frac{1}{\sqrt{HJ}}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial y}\Big).$$

El proyecto claramente riemanniano de llevar el cálculo infinitesimal a cualquier superficie haciendo uso únicamente de los coeficientes $E$ y $G$ debe fundamentales desarrollos al matemático italiano Eugenio Beltrami. Si $f\colon V \to R$ es una función de $V$ en los reales cuyas dos primeras derivadas existen, el primer operador de Beltrami aplicado a $f$ es

$$\nabla^2 f = \frac{1}{E}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \frac{1}{G}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2.$$

El segundo operador de Beltrami, también conocido como operador de Laplace–Beltrami, se define como

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{EG}}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Cuando calculamos $\Delta s$ para la función de escalamiento $s\colon V \to R$ asociada a una transformación conforme $\varphi\colon V \to V$, encontramos primeramente que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{1}{G}\Big(\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} - \sqrt{J}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} - \frac{s}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x} = s\Big(\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}\Big)\end{aligned}$$

y de manera análoga

$$\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{E}} = s\Big(\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial y} - \frac{1}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial y}\Big).$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}\Big) + s\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\sqrt{J}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x}\Big)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial y}\Big(\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial y}-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial y}\Big)+s\Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial\sqrt{H}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial y}\Big).$$

Por último,

$$\Delta s=sk-s^3K+\frac{1}{sE}\Big(\frac{\partial s}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{sG}\Big(\frac{\partial s}{\partial y}\Big)^2=sk-s^3K+\frac{1}{s}\nabla^2 s,$$

o bien,

$$\frac{\Delta s}{s}-\frac{\nabla^2 s}{s^2}+s^2K-k=0.$$

Viéndolo bien, sería mejor aplicar el operador a $u=\log s$. Es decir,

$$\frac{\Delta s}{s}-\frac{\nabla^2 s}{s^2}=\frac{\Delta e^u}{e^u}-\frac{\nabla^2 e^u}{e^{2u}}=\frac{e^u(\Delta u+\nabla^2 u}{e^u}-\frac{e^{2u}\nabla^2 u}{e^{2u}}=\Delta u$$

y la ecuación tiene ahora la forma más sencilla

$$\Delta u+Ke^{2u}-k=0.$$

Liouville parece haber sido el primero en obtener una ecuación de este tipo. En los anexos a las obras completas de Monge (1850), comentando el trabajo de Gauss, escribe en coordenadas isotrópicas

$$\frac{d^2\log\lambda}{dudv}\pm\frac{\lambda}{2a^2}=0.$$

La importancia de esta relación fue detectada más tarde por el mismo Beltrami, quien en 1869 reinterpreta

$$k=h^2\Big(\frac{\partial^2\log h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\log h}{\partial v^2}\Big),$$

## C. La ecuación diferencial

La ecuación de arriba en $u=\log s$ es susceptible de muchas interpretaciones. Baste mencionar que, por ejemplo, para M. Berger en 1969, es el instrumento para demostrar teoremas de uniformización entre variedades riemannianas de dimensión dos. Sin embargo, la interpretación "definitiva" se debe a los trabajos conjuntos de Kazdan y Warner durante la década 1970–1980 y es la siguiente: la pregunta ¿es $K$ la función de curvatura de una deformación conforme $(V, ge^u)$ de $(V, g)$? se reformula como ¿es $\Delta u + Ke^{2u} - k = 0$ soluble en $(V, g)$?

Como es frecuente en geometría diferencial, el problema geométrico se traduce como un problema de existencia de soluciones de una ecuación diferencial.

Por supuesto, esta interpretación contemporánea redescubre valiosos trabajos clásicos. Las primeras pruebas de existencia para $\Delta u = e^u$ en superficies de Riemann se atribuyen usualmente a Picard (1893, 1898), quien confiesa trabajar inspirado por “las bellas investigaciones de Monsieur Schwarz sobre la ecuación de Laplace”. El tratamiento del mismo asunto en el contexto del cálculo de variaciones se remonta a los trabajos de Poincaré (1898) sobre las funciones fuchsianas. A comienzos del siglo XX, Bieberbach (1912, 1916) y Rademacher (1930) sientan las bases de la investigación contemporánea en torno a $\Delta u = e^u$, en particular, y al caso de curvatura negativa, en general.

A partir de entonces las pruebas de existencia y ausencia de soluciones han ocupado a muchos investigadores. Como aquí sólo queremos presentar el problema, no hay lugar siquiera para un breve recuento de los resultados logrados en estos trabajos.

## D. Formulación axiomática

La geometría riemanniana de hoy se deriva de un sistema de axiomas que recoje y simplifica los interminables cálculos de los geómetras del siglo XIX. En este contexto, la ecuación para prescribir curvatura se obtiene de la manera siguiente.

Sea $(V, g)$ una variedad riemanniana bidimensional, $k$ su curvatura gaussiana, $\{\xi, \vartheta\}$ un cosistema local ortonormal orientado y $(\lambda_{12})$ la forma diferencial de la conexión de Levi–Civita. Sabemos que

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21}, \quad d\xi = -\lambda_{12} \wedge \vartheta, \quad d\vartheta = -\lambda_{21} \wedge \xi \quad \text{y} \quad k = \frac{d\lambda_{12}}{\xi \wedge \vartheta}\,.$$

La deformación conforme de $(V, g)$ en $(V, \tilde{g})$ producida por $u \in C^2(V)$ viene dada por $\tilde{g} = ge^u$. Por lo tanto,

$$d\tilde{\xi} = de^u\xi = e^u(du \wedge \xi - \lambda_{12} \wedge \vartheta) \quad \text{y} \quad d\tilde{\vartheta} = de^u\vartheta = e^u(du \wedge \vartheta - \lambda_{21} \wedge \xi)$$

y si usamos $du = u_\xi \xi + u_\vartheta \vartheta$, obtenemos

$$d\tilde{\xi} = -(u_\vartheta \xi + \lambda_{12}) \wedge e^u \vartheta = -(u_\vartheta \xi + \lambda_{12}) \wedge \tilde{\vartheta}$$

y

$$d\tilde{\vartheta} = -(u_\xi \vartheta - \lambda_{12}) \wedge e^u \xi = -(u_\xi \vartheta - \lambda_{12}) \wedge \tilde{\xi}.$$

Así pues,

$$\tilde{\lambda}_{12} = \lambda_{12} + \tfrac{1}{2}(u_\vartheta \xi - u_\xi \vartheta) = \lambda_{12} - {}^*du$$

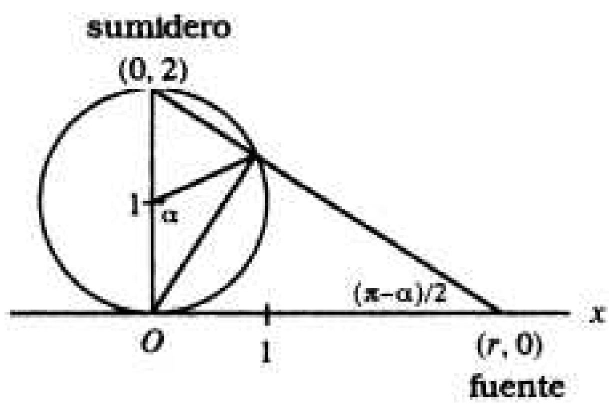
donde $^*$ simboliza el operador de Hodge. Finalmente,

$$K = \tilde{k} = \frac{\partial \tilde{\lambda}_{12}}{\tilde{\xi} \wedge \tilde{\vartheta}} = \frac{d\lambda_{12} - d^*du}{e^{2u}(\xi \wedge \vartheta)} = \frac{k - \Delta u}{e^{2u}} \quad \text{o} \quad \Delta u + K e^{2u} - k = 0.$$

## E. Ejemplo: el problema cartográfico inverso

¿Existe alguna deformación conforme del plano euclidiano $(R^2, \delta_{ij})$ en cuya métrica la curvatura sea una constante positiva, digamos, $K = 1$? La respuesta es afirmativa. De hecho, hay muchas de tales deformaciones.

Consideremos la contracción estereográfica:




En vista de que

$$\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+4}} \qquad \text{o} \quad \alpha = 2\,\text{arc sen}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+4}}\,,$$

la función de escalamiento de la deformación es

$$s = \frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{r^2+4}}} \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+4}}\right) = \frac{4}{r^2+4}\,.$$

Ciertamente, $u = \log s = \log 4 - \log(r^2+4)$ produce

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = -\frac{16}{(r^2+4)^2} = -e^{2u}.$$

De manera parecida, las contracciones cónicas y la contracción de Mercator aportan otras soluciones a $\Delta u + e^{2u} = 0$ en $(R^2, \delta_{ij})$.

## Referencias bibliográficas


[1] Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Springer, Berlín, 1921.

[2] Beltrami, E., "Ricerche di Analisi applicata alla Geometria" (1864), *Opere Matematiche*, Tomo Primo, Ulrico Hoelpi, Milano, 1902. "Zur Theorie des Krümmungmaasses", *Math. Ann.* **1** (1869), pp. 575–582.

[3] Berger, M. S., "On the Conformal Equivalence of Compact 2-Dimensional Manifolds", *J. of Math. and Mech.* **19** (1969), pp. 13–18.

[4] Bieberbach, L., *Göttinger Nach* (1912), pp. 599–602. "$\Delta u = e^u$ und die Automorphen Funktionen", *Math. Ann.* **77** (1916), pp. 173–212.

[5] Chebyschev, P. L., "Sur la construction des cartes géographiques", *Œuvres*, Tome I, Chelsea, Nueva York, 1856.

[6] Gauß, C. F., *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), Werke, Vierter Band, Georg Olms, Hidesheim, 1973.

[7] Kazdan, J. L. y F. W. Warner, "Curvature Functions for Compact 2-Manifolds", *Ann. of Math.* **99** (1974), pp. 14–47.

[8] Lagrange, J. L., "Sur la construction des cartes géographiques", *Œuvres*, Tome Quatrième, Georg Olms, Hidesheim, 1973.

[9] Liouville, J., "Sur le théorème de M. Gauss, corcernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface", Note IV en: G. Monge, *Application d'Analyse á la Géometrie*, Bachelier, París, 1850. "Sur l'équation aux différences partielles $d \log \lambda / dudv \pm \lambda/2a^2 = 0$", *J. de Math.* **18** (1853), pp. 71–72.

[10] Milnor, J., "A Problem in Cartography", *Am. Math. Month.* **76** (1969), pp. 1101–1112.

[11] Picard, E., "De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée", *J. de Mathématiques, Quatrième Série* **IX** (1893), pp. 273–291. "Sur léquation $\Delta u = e^u$", *J. de Mathématiques, Cinquième Série* **III** (1898), pp. 313–316.
[12] Poincaré, H., "Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$" (1898), *Œuvres*, Tome Deuxième, Gauthier-Villars, París, 1916.
[13] Rademacher, H., "Die Gleichung $\Delta u = e^u$, Neunzehnes kapitel", en *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* editadas por P. Frank y R. von Mises, Braunschweig, Vieweg, 1930.
[14] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading, 1950.