La transformada de Laplace como aplicación en la resistencia de materiales

Agustín Pacheco Cárdenas*
y
Javier Alejandro Gómez Sánchez**

* Facultad de Ingeniería, UAQ; Depto. Ciencias Básicas, ITQ
** Facultad de Ingeniería, UAQ

agosto de 1998

RESUMEN

Se aplican las técnicas más elementales de transformadas de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales no homogeneas para encontrar la ecuación de la elástica de una viga, así como las ecuaciones del momento flexionante y la fuerza cortante en cualesquiera puntos de ella.

Planteamiento del problema

Queremos determinar la ecuación de la curva que adoptará el eje neutro de una viga sometida a la acción de cargas externas a ella.

Ampliando el segmento Δ mostrado en la figura 1, sea O' el centro de curvatura de la curva $E'C$ y $\rho = O'E'$ el radio de curvatura (figura 2).

Sabemos que el radio de curvatura viene dado por la expresión

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \tag{1}$$

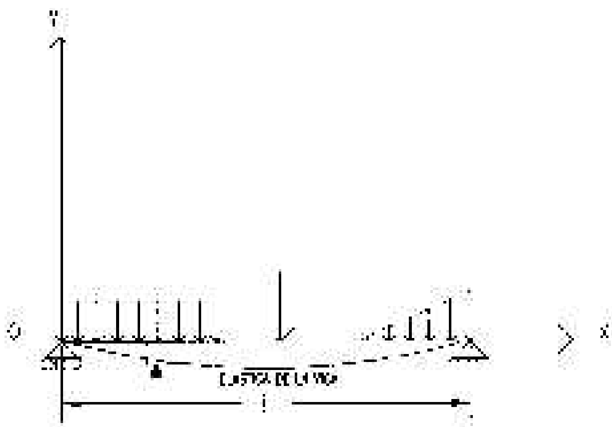


Figura 1.

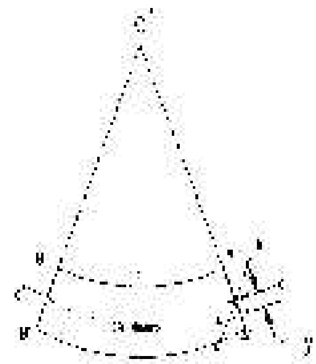


Figura 2.

y es la ecuación de la elástica.

En la figura 2 consideramos las hipótesis que se establecen en los cursos de resistencia de materiales para este tipo de problemas: elasticidad, homogeneidad, sección constante, etcétera.

Tracemos $D'D$ paralelo a $B'B$ y $E'E$ paralelo a $C'C$. Entonces los triángulos $C'CO'$ y $EE'C$ son triángulos semejantes y, por lo tanto, sus lados homólogos son proporcionales. Podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{EE'}{CE'} = \frac{C'C}{CO'}\,;$$

como $EE' = \delta$, la deformación que sufrió la fibra situada a una profundidad y del eje neutro,

$$CE' = y, \qquad C'C = \Delta s, \qquad CO' = \rho,$$

tendremos:

$$\frac{\delta}{y} = \frac{\Delta s}{\rho}\,.$$

De aquí,

$$\frac{\delta}{\Delta s} = \frac{y}{\rho}\,. \tag{2}$$

Si designamos $(\delta/\Delta s) = \epsilon$ a la deformación unitaria, entonces

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}\,. \tag{3}$$

Por la ley de Hooke sabemos que $\sigma = E\epsilon$, donde σ es el esfuerzo a que está sometida la fibra en cuestión y E el módulo de elasticidad del material de que está hecha la sección, el cual suponemos constante. Por lo tanto,

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{\rho}; \qquad \sigma = \frac{E}{\rho} y. \tag{4}$$

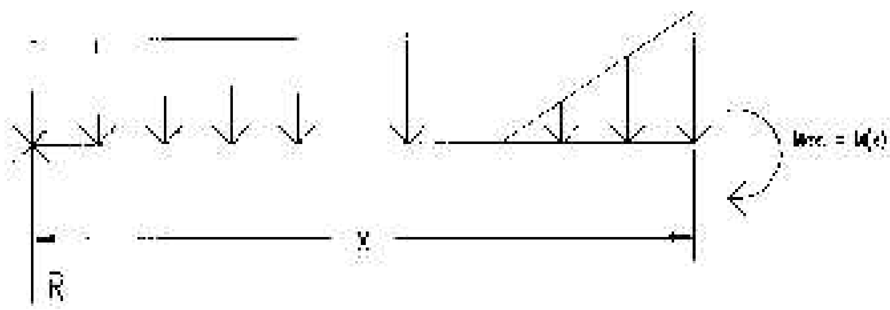


Figura 3.

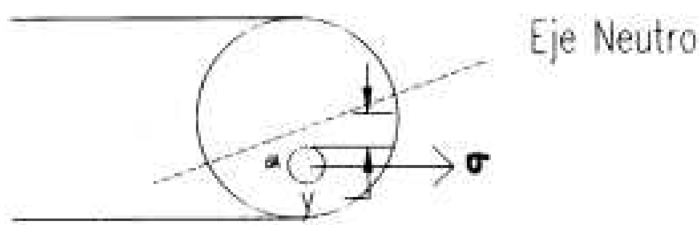


Figura 4.

Cortemos ahora la viga en un punto x cualquiera (figura 3), y sean M_{ext} el momento producido por las fuerzas exteriores que actúan sobre la viga y M_{int} el momento provocado por los esfuerzos internos en la viga. Si

$$M_{\text{int}} = \int \sigma y \, dA \tag{5}$$

y como se desea que la viga esté en equilibrio, entonces:

$$M_{\text{int}} = M_{\text{ext}}; \qquad i.e., \qquad M(x) = \int \sigma y \, dA. \tag{6}$$

Sustituyendo (4) en (6) se tiene:

$$M(x) = \int \left(\frac{E}{\rho} y\right) y \, dA = \int \frac{E}{\rho} y^2 \, dA.$$

Puesto que $\int y^2 \, dA = I$ es el momento de inercia de la sección, entonces

$$M(x) = \frac{EI}{\rho}\,; \tag{7}$$

sustituyendo ρ de la ec. (1), tenemos:

$$M(x) = \frac{EI}{\rho} = \frac{EI\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\,. \tag{8}$$

En la práctica, los valores de dy/dx son de magnitud muy pequeña y, sin cometer un gran error, se puede considerar que $(dy/dx)^2 \to 0$. Por lo tanto, la ec. (8) da el siguiente resultado:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x), \tag{9}$$

que llamaremos *Primera ecuación diferencial de la elástica.*

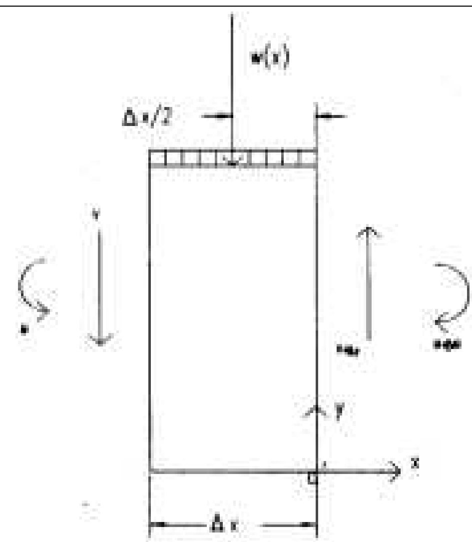
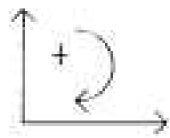


FIGURA 5.

Hagamos las siguientes consideraciones: tomemos un segmento diferencial de la viga (figura 5) y adoptemos la convención



Por la $\sum Fy = 0$, tenemos que $-w(x)(\Delta x) - V + V + (\Delta y) = 0$, de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = w(x), \tag{10}$$

y de $\sum M_0 = 0$ se tiene $-M - V(\Delta x) - w(x)(\Delta x)(\Delta x/2) + M + \Delta M \ldots$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V + w(x)\frac{\Delta x}{2}\,; \tag{11}$$

tomando $\Delta x \to 0$ en las ecs. (10) y (11) se obtienen:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \tag{12}$$

y

$$\frac{dV}{dx} = w(x), \tag{13}$$

y, de aquí, integrando obtenemos las muy conocidas relaciones:

$$M(x) = \int V(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad V(x) = \int w(x)\,dx,$$

las cuales establecen que:

- La suma de áreas del diagrama de fuerzas cortantes es igual al momento flexionante.
- La suma de fuerzas externas es igual a la fuerza cortante.

Sustituyendo (12) y (13) en (9), se obtiene el siguiente resultado:

$$\boxed{EI\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dM}{dx} = V(x), \qquad i.e., \qquad EI\frac{d^3y}{dx^3} = V(x). \tag{14}}$$

y

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dV}{dx} = w(x), \qquad i.e., \qquad EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x), \tag{15}$$

expresión que define la elástica en términos de la ecuación de carga, y que llamaremos *Segunda ecuación diferencial de la elástica*

Ejemplos

Veamos ahora cómo, conociendo teoremas relativamente elementales de la transformada de Laplace, se puede encontrar la ecuación de la elástica, y aún ecuaciones para el momento flexionante y la fuerza cortante en vigas estáticamente indeterminadas.

Ejemplo 1.

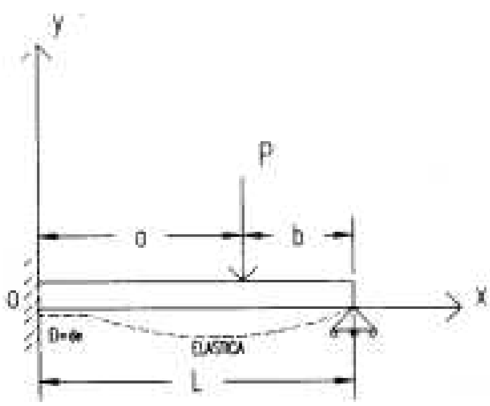


Figura 6.

Definamos

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x \neq a, \end{cases}$$

entonces $w(x) = P\delta(x-a)$. Por lo tanto, la ec. (15) queda como:

$$\frac{d^4}{dx^4} = -\frac{P}{EI}\delta(x-a).$$

Tomando transformadas de Laplace y designando a $\mathcal{L}\{y(x)\} = y(s)$, tenemos que

$$s^4 y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y^{(2)}(0) - y^{(3)}(0) = -\frac{P}{EI} e^{-as};$$

como $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = C_1$ y $y^{(3)}(0) = C_2$, entonces

$$y(s) = \frac{C_1}{s^3} + \frac{C_2}{s^4} - \frac{Pe^{-as}}{EIs^4}$$

y, tomando transformadas inversas, se tendrá:

$$y(x) = \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{C_2}{6} x^3 - \frac{P}{6EI}(x-a)^3 u(x-a); \qquad u(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

Con $y(L) = 0$, $y'(L) = 0$, se tiene que

$$C_1 = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{2L^2 EI}, \qquad C_2 = \frac{Pb(3L^2 - b^2)}{2L^3 EI}$$

y la ecuación de la elástica toma la forma

$$y(x) = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{4L^2 EI} x^2 + \frac{Pb(3L^2 - b^2)}{12L^3 EI} x^3 - \frac{P}{6EI}(x-a)^3 u(x-a),$$

es decir,

$$\boxed{EIy(x) = -\frac{P}{12L^3}[3bL(L^2 - b^2)x^2 - b(3L^2 - b^2)x^3 + 2L^3(x-a)^3 u(x-a)]. \quad (16)}$$

Ahora bien,

$$EIy^{(2)}(x) = M(x) = -\frac{P}{2L^3}[bL(L^2 - b^2) - b(3L^2 - b^2)x + 2L^3(x-a)u(x-a)], \quad (17)$$

$$EIy^{(3)}(x) = V(x) = -\frac{P}{2L^3}[-b(3L^2 - b^2) + 2L^3 u(x-a)], \quad (18)$$

y de (17), si $x = 0$, entonces

$$M(0) = -\frac{PbL(L^2 - b^2)}{2L^3} = -\frac{Pab(L+a)}{2L^2};$$

si $x = L$, entonces

$$M(L) = 0.$$

De (18), si $x = 0$, entonces

$$V(0) = -\frac{Pb(3L^2 - b^2)}{2L^3};$$

si $x = L$, entonces

$$V(L) = -\frac{P}{2L^3}[L^2(2L - 3b) + b^3].$$

Nuevamente de (17), si $x = a$, se tiene que:

$$M(a) = -\frac{Pb}{2L^3}[L(L^2 - b^2) - a(3L^2 - b^2)].$$

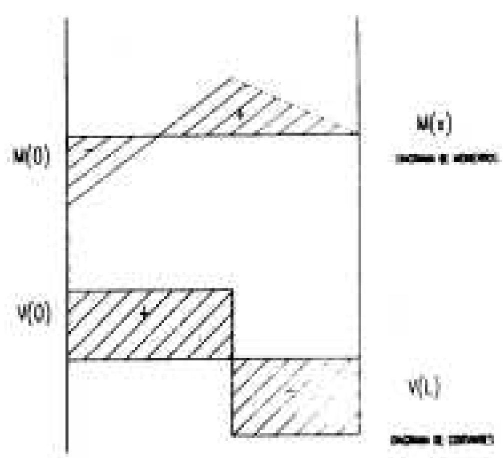


Figura 7.

Ejemplo 2. Viga continua con dos claros iguales.

Si eliminamos el apoyo central (figura 8), la idea es aplicar en $x = L$ una fuerza de magnitud R, tal que regrese nuestra viga a su posición de

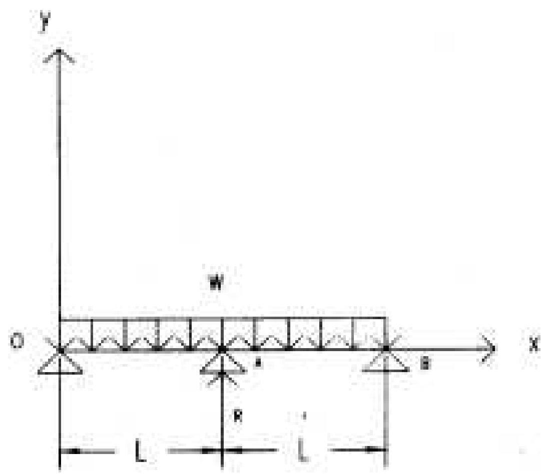


Figura 8.

equilibrio. Entonces,

$$w(x) = -w + R\delta(x-L), \qquad \delta(x-L) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = L, \\ 0 & \text{si } x \neq L. \end{cases}$$

Por lo anterior, la ecuación diferencial de la elástica queda como sigue:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{w}{EI} + \frac{R}{EI}\delta(x-L),$$

con $y(0) = y^{(2)}(0) = 0$, $y'(0) = C_1$, $y^{(3)}(0) = C_2$, $y(L) = 0$, $y(2L) = 0$ y $y^{(2)}(2L) = 0$. Tomando transformadas de Laplace obtenemos:

$$s^4y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy^{(2)}(0) - y^{(3)}(0) = -\frac{w}{EIs} + \frac{R}{EI}e^{-sL}.$$

Al sustituir los valores de las condiciones iniciales, y despejando $y(s)$, se tiene

$$y(s) = \frac{C_1}{s^2} + \frac{C_2}{s^4} - \frac{w}{EIs^5} + \frac{Re^{-sL}}{EIs^4}$$

y, tomando transformadas inversas,

$$y(x) = C_1x + \frac{C_2}{6}x^3 - \frac{w}{24EI}x^4 + \frac{R}{5EI}(x-L)^3u(x-L).$$

Sustituyendo $y(L) = 0$, $y'(2L) = 0$, $y^{(2)}(2L) = 0$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_1 + \frac{C_2 L^2}{6} - \frac{wL^3}{24EI} = 0, \tag{i}$$

$$C_1 + \frac{2C_2 L^2}{3} - \frac{wL^3}{3EI} + \frac{RL^2}{12EI} = 0, \tag{ii}$$

$$C_2 - \frac{wL}{2EI} + \frac{R}{2EI} = 0, \tag{iii}$$

que al resolverse da:

$$C_1 = \frac{wL^3}{48EI}, \qquad C_2 = \frac{3wL}{8EI}, \qquad R = \frac{5wL}{4}$$

y, entonces, la ecuación de la elástica quedará como sigue:

$$\boxed{y(x) = -\frac{w}{48EI}[L^3x - 3Lx^3 + 2x^4 - 10L(x-L)^3u(x-L)]. \qquad \text{(iv)}}$$

Si derivamos dos y tres veces la ec. (iv), se obtiene:

$$\boxed{EIy^{(2)}(x) = M(x) = \frac{w}{8}[3Lx - 4x^2 + 10L(x-L)u(x-L)] \qquad \text{(v)}}$$

que es la ecuación de momentos para $0 \le x \le 2L$ y

$$\boxed{EIy^{(3)}(x) = V(x) = \frac{w}{8}[3L - 8x + 10Lu(x-L)] \qquad \text{(vi)}}$$

que da la fuerza cortante entre $0 \le x \le 2L$.

Si $x = L$, entonces

$$M(L) = -\frac{wL^2}{8}\,.$$

Si $M(x) = 0$ se tiene que: si $x < L$, entonces $x_1 = 3L/4$; si $x > L$, entonces $x_2 = 5L/4$ y $x_3 = 2L$. El momento máximo positivo se presentará donde $V(x) = 0$, *i.e.*, si $x < L$, entonces $x_4 = 3L/8$, y si $x > L$, entonces

$x_5 = 13L/8$. Así que, sustituyendo en la ec. (v), obtenemos

$$M_{\text{máx}(+)} = \frac{9wL^2}{128}\,;$$

además, si $x = 0$, entonces $V(0) = R_{\text{izquierda}} = 3wL/8$ y, si $x = 2L$, entonces $V(2L) = R_{\text{derecha}} = -3wL/8$.

Las ecs. (v), (vi) y los valores encontrados nos permiten obtener el diagrama que se muestra en la figura 9.

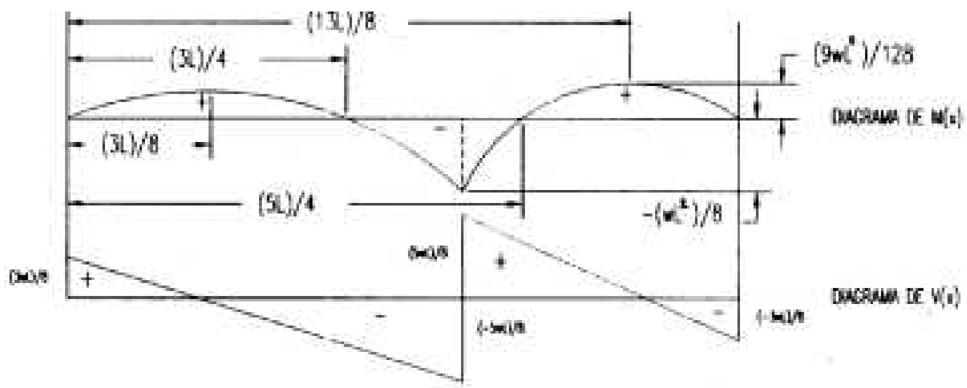


Figura 9.

Bibliografía

Murray R. Spiegel, *Resistencia de materiales*, McGraw-Hill.
Murray R. Spiegel, *La transformada de Laplace*, McGraw-Hill.