

¿De qué trata la teoría de singularidades y catástrofes?

SEGUNDA PARTE

Herminio Blancarte Suárez*
Lic. en Matemáticas Aplicadas,
Facultad de Ingeniería, UAQ

* SNI-PEIUAQ

15 de julio de 1998

RESUMEN

Continuamos con la presentación de los preliminares de la teoría de singularidades y catástrofes. Ahora siguiendo unas notas de E. Bierstone, *An Introduction to Singularities of Smooth Functions* [2] y como referencia principal: *Stable Mappings and Their Singularities* de M. Golubitsky y V. Guillemin [1]. Dicha presentación es la continuación de la primera parte [3] y, como aquella, ésta obedece a fines meramente didácticos y de divulgación de esta fascinante teoría y de estos dos textos clásicos.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de singularidades de *mapeos suaves* (veáse [3]) tiene que ver con el *desarrollo local* de los mapeos suaves y sus *perturbaciones*. El problema fundamental, como es costumbre en matemáticas, es el de *clasificar*; en este caso: los mapeos suaves de \mathbf{R}^n a \mathbf{R}^p (después: mapeos suaves entre dos variedades diferenciables N y P) a través de una relación de equivalencia razonable entre estos mapeos. Por ejemplo: \sim es relación de equivalencia entre dos mapeos suaves $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ si existen mapeos suaves $h_1: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $h_2: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ tales que $f = h_2 \circ g \circ h_1$, llamados *transformaciones suaves de coordenadas*. Piense, por ejemplo, en dos transformaciones lineales no singulares equivalentes [4] T_1 y $T_2: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$, *i.e.*, transformaciones lineales para las cuales existen transformaciones lineales no singulares $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$



y $P: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$, llamadas *transformaciones de cambio de base*, tales que $T_1 = P^{-1}T_2Q$. Llamaremos al espacio dominio \mathbf{R}^n *la fuente* y al espacio codominio \mathbf{R}^p *destino*.

Para simplificar en esta parte, consideraremos solamente mapeos suaves de

$$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1. \text{ También supondremos que } f(0) = 0.$$

Observemos que si $f(0) \neq 0$, podemos definir una función $g(x) = f(x) - f(0)$, y como f y g son iguales hasta una traslación a $f(0)$, y como trivialmente una traslación es una *transformación suaves de coordenadas*, dicha g pertenece a la clase de equivalencia determinada por la f .

Comencemos estudiando justamente el desarrollo local de dichos mapeos cerca del origen de \mathbf{R}^n , a través de geometría de las fibras o pre-imágenes de dichos mapeos para pequeñas $\varepsilon > 0$ (pequeñas perturbaciones del origen), *i.e.*,

$$f^{-1}(\varepsilon) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n: f(x) = \varepsilon\}. \quad (1)$$

Y particularmente para el conjunto cero (el conjunto de todos los ceros de la función) que denotaremos por $Z(f)$ dado por

$$Z(f) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n: f(x) = 0\} \quad (2)$$

Esta manera de estudiar el problema de clasificación, debería ser al menos intuitivamente natural, ya que de esta forma esperaríamos detectar la ocurrencia de comportamientos arbitrariamente patológicos o catastróficos de nuestros mapeos.

Cuando hablamos de mapeos suaves es conveniente utilizar una notación compacta, con respecto a las derivadas parciales de tales mapeos en los espacios euclidianos \mathbf{R}^n . Así, se introduce la definición de un *multíndice* k a una n -ada de naturales $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, donde convenimos que $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. $\mathbf{k}! = k_1!k_2! \dots k_n!$. Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$. Así,

$$D^{\mathbf{k}}f = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial x^{\mathbf{k}}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad (3)$$

de hecho, el teorema de Taylor de una función suave f en una vecindad del punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de radio $\varepsilon > 0$ y $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ con $\|a - h\| < \varepsilon$, con esta notación maravillosa se ve de la siguiente manera [6]

$$f(a - h) = \sum_{l=0}^m \left(\frac{1}{l!} \sum_{|\mathbf{k}|=l} \binom{l}{\mathbf{k}} D^{\mathbf{k}}f(a)h^{\mathbf{k}} \right) + R_{m+1}, \quad (4)$$



con

$$R_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\mathbf{k}|=m+1} \binom{m+1}{\mathbf{k}} D^{\mathbf{k}} f(\xi) h^{\mathbf{k}}. \quad (5)$$

R_{m+1} es llamado el residuo de orden $m+1$, y $\xi = a + t(h-a)$ con $0 < t < 1$. Y definamos

$$\binom{p}{\mathbf{k}} = \frac{p!}{\mathbf{k}!(p-|\mathbf{k}|)!}, \quad \text{con } p \geq |\mathbf{k}|.$$

Como se prueba en los cursos elementales de análisis matemático (véase Cap. IV de [5]), $Z(f)$ es un conjunto cerrado para un mapeo continuo, donde con (X, d) es un espacio métrico y $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ un mapeo continuo. De hecho, el inverso de este resultado también es cierto, *i.e.*, dado un conjunto cerrado de \mathbf{R}^n es el conjunto cero $Z(f)$ para algún mapeo continuo f definido en X (véanse también Cap. IV de [5], ejercicios 20 y 22). A continuación mostraremos la versión para mapeos suaves de éste último resultado.

Proposición 1. *Cualesquier conjunto cerrado de \mathbf{R}^n es el conjunto cero de un mapeo suave.*

Prueba: Sea X un conjunto cerrado de \mathbf{R}^n . Su complemento $\mathbf{R}^n - X$ es un conjunto abierto que puede ser cubierto por una colección $\{B_i: B_i \text{ es una bola en } \mathbf{R}^n \text{ e } i \in \mathbf{N}\}$. Definamos funciones suaves f_i de la manera

$$f_i(x) = \begin{cases} \varepsilon > 0 & \text{si } x \in B_i \\ 0 & \text{si } x \notin B_i. \end{cases} \quad (6)$$

Una forma de hacer lo anterior es, por ejemplo, considerar la función

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/(t-1)^2} & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1, \end{cases} \quad (7)$$

que evidentemente es suave (véase [3]). Ahora, con la ayuda del mapeo

$$\rho(x) = \left(\frac{\|x-a\|}{r} \right)^2 \quad \text{con } \|x-a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} \quad \text{la norma euclidiana,} \quad (8)$$

el cual tiene las siguientes propiedades: $\rho(x) < 1$ si $x \in B_r(a)$ y $\rho(x) \geq 1$ si $x \notin B_r(a)$. Además, el cuadrado sirve para que dicho mapeo sea suave en una vecindad del punto a , debido a que justamente la norma euclidiana tiene

∴ ∴

problemas de suavidad (diferenciabilidad) en dicho punto. Así, tenemos que la composición de tales mapeos nos sirven para definir tales f_i , *i.e.*,

$$f_i = \phi \circ \rho, \tag{9}$$

satisface las propiedades deseables para las f_i .
Entonces definamos

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i M_i} \right) f_i, \quad \text{donde} \quad M_i = \sup_{|\mathbf{k}| \leq i} \left| \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f_i}{\partial x^{\mathbf{k}}} (x) \right|. \tag{10}$$

Observemos que las M_i son alcanzadas por $\partial^{|\mathbf{k}|} f_i / \partial x^{\mathbf{k}}$ para algún punto $x \in \overline{B_i}$ (la cerradura de B_i), dada su continuidad y la compacidad de $\overline{B_i}$. Así también se garantiza la continuidad uniforme de $\partial^{|\mathbf{k}|} f_i / \partial x^{\mathbf{k}}$ en $\overline{B_i} \forall \mathbf{k}$. Por lo tanto, la elección de tales M_i garantizan que para todos los multíndices \mathbf{k} , dicha serie converge uniformemente (de hecho, es la generalización del argumento de la convergencia uniforme del polinomio de Taylor dada en [3]). De ahí que se garantiza no sólo la definición, sino también la suavidad tal mapeo f y

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in X \quad \blacksquare$$

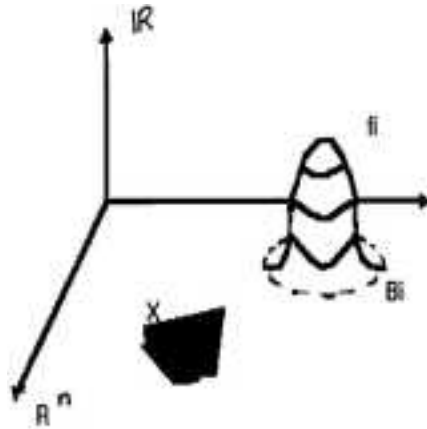


FIGURA 1.

2. EL LEMA DE HADAMARD

Ahora establezcamos un resultado elemental pero demasiado espectacular.
Lema 1 (lema de Hadamard). Si $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_p)$ es m -veces continuamente diferenciable tal que

$$f(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p) = 0, \quad \vdots \quad \vdots$$

entonces existen n -funciones $(m - 1)$ veces continuamente diferenciables $g_i(x_1, \dots, x_p)$, tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x). \quad (11)$$

Prueba: Es una simple aplicación del teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, a saber:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_p) &= \int_0^1 \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n, x_{n+1}, \dots, x_p)}{\partial t} dt \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \times \int_0^1 \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n, x_{n+1}, \dots, x_p)}{\partial tx_i} dt. \end{aligned}$$

Así, podemos definir:

$$g_i(x_1, \dots, x_p) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n, x_{n+1}, \dots, x_p)}{\partial tx_i} dt \quad \blacksquare$$

Una versión un poco mas general del lema de Hadamard es la siguiente (Lema 6.10 de [1]). Antes recordemos que

Definición 1. *Un subconjunto $V \subseteq \mathbf{R}^n$ es abierto convexo si dados cualesquiera dos puntos p y q en V , todo el segmento que une p con q está contenido en V . Es decir, el mapeo $\alpha[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ continuo dado por*

$$\alpha(t) = p + t(q - p) \text{ es tal que } \alpha([0, 1]) \subset V.$$

Evidentemente una bola en \mathbf{R}^n , es un conjunto convexo.

El lema 2 es una generalización del lema 1.

Lema 2. *Sea $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ suave con $0 \in U \subset \mathbf{R}^n$ abierto convexo, $f(0) = 0$ y $(\partial f / \partial x_i)(0) \neq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, existen mapeos suaves: $g_1, g_2, \dots, g_n: U \rightarrow \mathbf{R}$ tales que para cada x en U*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x); \quad \text{además} \quad g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$



Prueba: Sea $x \in U$, por la convexidad de U , el mapeo $\phi: U \rightarrow \mathbf{R}$ dado por $\phi(t) = f(tx)$, que está bien definido y

$$f(x) = \phi(1) = \int_0^1 \frac{d\phi}{dt} dt \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

Por lo tanto, si

$$g_i(x) \equiv \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

tenemos que

$$g_i(0) \equiv \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \quad \blacksquare$$

El lema de Hadamard es el resultado más elemental de los llamados teoremas de división para los mapeos suaves, *i.e.*, “el algoritmo de Euclides para los mapeos suaves”.

3. UN EJEMPLO MOTIVANTE

Pensando de manera inversa respecto a la proposición 1 de la sección 1, *i.e.*, respecto a $Z(f)$ esperaríamos que nos proporcione información sobre el comportamiento local de un mapeo suave f . De hecho, muchas afirmaciones concernientes al desarrollo de un mapeo suave se establecen bajo ciertas condiciones naturales sobre tal mapeo y sus derivadas parciales. Por ejemplo, supongamos que tenemos un mapeo suave de una sola variable f tal que $f(0) = 0$. Cumpliendo además que

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(0) \neq 0 \quad \forall n \geq k,$$

entonces f puede escribirse como

$$f(x) = \pm x^k, \tag{12}$$

con respecto a un apropiada elección de coordenada x en una vecindad de origen en la fuente.

A saber, por el teorema de Taylor para nuestro mapeo f , en cada punto x perteneciente a la vecindad del cero tenemos que:

$$f(x) = \left(\frac{f^k(0)}{k!}\right)x^k + \dots + \left(\frac{f^{(2(k-1))}(0)}{(2(k-1))!}\right)x^{2(k-1)} + \left(\frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!}\right)x^{2k-1} \quad \vdots \quad \vdots$$

para $0 < \xi < x$, o bien, si definimos

$$\begin{aligned} F(x, x^2, \dots, x^k) &\equiv f(x) \\ &= \pm x^k \left(\left(\frac{f^k(0)}{k!} \right) + \dots + \left(\frac{f^{(2(k-1))}(0)}{(2(k-1))!} \right) x^{k-2} + \left(\frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!} \right) x^{k-1} \right) \end{aligned}$$

el \pm lo determinan las derivadas y, escrita la expresión de esta manera, pretendemos que la expresión entre paréntesis sea positiva. Por otro lado, $F(0, \dots, 0, x^k) = f(0) = 0$, entonces, el lema de Hadamard establece que

$$\begin{aligned} F(x, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k) &= f(x) = \sum_{n=1}^{k-1} x_n g_n = \sum_{n=1}^{k-1} x^n g_n \\ &= x^k (x^{1-k} g_1 + x^{2-k} g_2 + \dots + x^{-1} g_{k-1}). \end{aligned}$$

Así, definamos

$$g_1 = \left(\frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!} \right) x^{2(k-1)}, \dots, g_n = \left(\frac{f^k(0)}{k!} \right) x,$$

entonces

$$g(x) = \left(\frac{f^{(2k-1)}(\xi)}{(2k-1)!} \right) x^k + \dots + \left(\frac{f^k(0)}{k!} \right), \quad \text{con } g(0) = \left(\frac{f^k(0)}{k!} \right) > 0,$$

el cual es un mapeo suave en una vecindad del origen evidentemente. Así, tenemos que

$$f(x) = \pm x^k g(x). \tag{13}$$

Ahora, como $g(0) > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0 \forall x \in (-\delta, \delta)$ y de la definición de la raíz k -ésima tenemos que

$$g^{\frac{1}{k}}(x) \equiv e^{\frac{1}{k} \log g(x)}$$

es un mapeo suave debido a que e^x , $\log x$ y $g(x)$ lo son en sus dominios respectivos. Consideremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\mathbf{x}(x) = x(g(x))^{\frac{1}{k}};$$

⋮ ⋮ ⋮ por el párrafo anterior dicho mapeo es también suave. Así finalmente, si

presentamos (13) como $f(x) = \pm(xg^{1/k}(x))^k$ tenemos

$$f(x) = \pm \mathbf{x}^k \quad \blacksquare \quad (14)$$

4. K -DETERMINACIÓN DERECHA FINITA

Por lo anterior, dada nuestra relación de equivalencia definida al principio, que ahora llamaremos más precisamente: f es k -determinada por la derecha en el origen, *i.e.*, f es equivalente (bajo un cambio suave de coordenadas del origen en la fuente) a su polinomio de Taylor de orden k en el origen. Así pues, dado un mapeo suave $f \in C^k(\Omega)$ para un abierto $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, se identifica con su polinomio de Taylor de orden k en el origen bajo esta relación de equivalencia. Como consecuencia, observemos que en particular la k -determinación derecha finita implica que cada polinomio es equivalente consigo mismo.

5. PUNTOS REGULARES Y CRÍTICOS DE LOS MAPEOS SUAVES

Definición 2. Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un mapeo suave y $a \in \mathbf{R}^n$. Decimos que a es un punto regular de f (o no singular). Si la diferencial df_a o, en este caso, el gradiente $\nabla f(a)$ no se anula, *i.e.*, si

$$df_a = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \neq \bar{0}. \quad (15)$$

Una caracterización de tales puntos es la siguiente.

Teorema 1. Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ suave y $a \in \mathbf{R}^n$ tal que $df_a \neq \bar{0}$, con al menos $(\partial f / \partial x_1)(a) \neq 0$, entonces existe un abierto convexo U de a y un sistema de coordenadas suave $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n): U \rightarrow \mathbf{R}^n$ tal que $x'_i(a) = 0 \forall i \neq 1$ y

$$f(x) = f(a) + x'_1(x) \quad \forall x \in U \quad (16)$$

Prueba: Sea $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definida por $F(x, y) = (-f(x) + f(a) + y_1, y_2, \dots, y_n) \cdot F(a, 0) = 0$ y la diferencial de F en el punto $(a, 0)$ viene



dada por la matriz de $n \times 2n$

$$DF_{(a, 0)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix},$$

la cual es de *rango* n . Entonces, por el teorema de la *función implícita* (véase teorema 2.4 de [1]), existen abiertos U de a y V del 0 en \mathbf{R}^n y un mapeo suave $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n): U \rightarrow V$ tales que $x'(x) = y \forall x \in U$ y $F(x, x'(x)) = 0$, *i.e.*,

$$F(x, x'(x)) = (-f(x) + f(a) + x'_1(x), x'_2(x), \dots, x'_n(x)) = 0,$$

lo cual equivale a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + x'_1(x), \\ x'_2(x) &= 0, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x'_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

y en particular $x'_i(a) = 0$ para $i \neq 1$. Y así tenemos que

$$f = f(a) + x'_1 \quad \text{en } U \quad \blacksquare$$

6. LOS MAPEOS DE MORSE

Definición 3. Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un mapeo suave y $a \in \mathbf{R}^n$ es un punto crítico de f (o singular) si la diferencial df_a o, en este caso, el gradiente $\nabla f(a)$ se anula, *i.e.*, si

$$df_a = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = \bar{0}. \quad (17)$$

Definición 4. Sea $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un mapeo suave y $a \in \mathbf{R}^n$ es un punto crítico no degenerado de f si la matriz hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \quad (18)$$

$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$ es no singular.

El desarrollo de los mapeos suaves en los puntos cercanos a *los puntos críticos no degenerados* es descrito por el lema de Morse. Antes de demostrar dicho lema, utilizaremos un resultado preliminar (Lema 6.12 de [1]), que es consecuencia del lema de Hadamard.

Lema 3. *Sea $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ suave con $U \subset \mathbf{R}^n$ abierto convexo con $0 \in U$ y $f(0) = 0$. Supongamos que el 0 es un punto crítico no degenerado de f . Asumamos que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \pm \delta_{ij}.$$

Entonces existe una vecindad V del 0 contenida en U y existen mapeos suaves $h_i: V \rightarrow \mathbf{R}$ ($1 \leq i \leq n$) satisfaciendo

$$\begin{aligned} a) \quad & h_i(0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0) = \delta_{ij}; \\ b) \quad & f(x) = \pm h_1^2(x) \pm h_2^2(x) \pm \cdots \pm h_n^2(x) \quad \forall x \in V. \end{aligned} \quad (19)$$

Lema 4 (lema de Morse). *Sea a un punto crítico no degenerado de f . Entonces existe un sistema local de coordenadas suave $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ en una vecindad U de a , tal que $x'_i(a) = 0$, para $1 \leq i \leq n$, y tal que*

$$f = f(a) - x'^2_1 - x'^2_2 - \cdots - x'^2_k + x'^2_{k+1} + \cdots + x'^2_n \quad \text{en } U. \quad (20)$$

Si asumimos que $a = 0$ y que $f(0) = 0$, obtenemos que

$$f = -x'^2_1 - x'^2_2 - \cdots - x'^2_k + x'^2_{k+1} + \cdots + x'^2_n \quad \text{en } U. \quad (21)$$

Prueba: Por (19) del lema 3 y (14), tenemos que

$$f(x) = \pm \mathbf{x}_1^2 \pm \mathbf{x}_2^2 \pm \cdots \pm \mathbf{x}_n^2 \quad \forall x \in V, \quad (22)$$

para un cambio suave de coordenadas: $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ en V . Así, (22) es una *forma cuadrática real* sobre $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Entonces, por 4.5 de [4] existe un entero k dependiente únicamente de f , y existe un cambio de coordenadas suave: $(x'_1, x'_2, \dots, x'_k, x'_{k+1}, \dots, x'_n)$ tales que

$$f = -x'^2_1 - x'^2_2 - \cdots - x'^2_k + x'^2_{k+1} + \cdots + x'^2_n \quad \text{en } U \quad \blacksquare \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

7. PROPIEDADES GENÉRICAS DE LOS MAPEOS SUAVES

Consideremos el espacio $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Se dice que una colección de mapeos suaves $\{f_\alpha: f_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \text{ y } \alpha \in I\}$ posee una *propiedad genérica* P , si *casi toda* la colección anterior tiene dicha propiedad en algún sentido topológico razonable. Volviendo al caso de la clasificación de los mapeos de Morse, la idea fundamental se debe a René Thom y Hassler Whitney. Para formalizar un poco más este concepto, establezcamos los siguientes preliminares.

Espacios de Baire [8, 9]

Sea (X, τ) un espacio topológico

Definición 5. Sean A y B subconjuntos de X . A es denso en B si $B \subset \bar{A}$, donde \bar{A} es la cerradura de A .

Definición 6. D es denso ninguna parte, si para cada abierto U , existe otro abierto $U' \subset U$ tal que $U' \cap D = \Phi$.

Definición 7. Un subconjunto $A \subseteq X$ es de la primera categoría si $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$ con A_n cerrados y densos ninguna parte.

Definición 8. Un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado de la segunda categoría o residual, si A no es de la primera categoría, i.e., si $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n \subseteq A$ con U_n denso y abierto.

Teorema 2 (teorema de Baire 1899). Todo espacio métrico (X, d) completo es de la segunda categoría.

En general, en los espacios topológicos en donde los conjuntos residuales son densos se les llama *espacios de Baire*.

Así, en los espacios métricos, se dice que una propiedad P es verdadera *casi en todas partes* si es verdadera en un *conjunto residual* de dicho espacio. El equivalente a una proposición P verdadera *casi en todas partes* en los espacios topológicos en general, se dice que dicha propiedad P es *genérica*, i.e., si es verdadera en un *conjunto residual* de dicho espacio.

Volviendo al párrafo inicial, consideremos un conjunto compacto $K \subset \mathbf{R}^n$ y consideremos $C^\infty(K, \mathbf{R}) = \{f: K \rightarrow \mathbf{R}: f \text{ es suave}\}$, la topología más natural de que podemos dotar a dicho espacio es la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas τ_c , también llamada compacto-abierto. En esta topología, enunciemos un espectacular teorema, la versión más general será dada en el teorema 4 de la sección 9.



Teorema 3. *Sea $K \subset \mathbf{R}^n$ compacto y $C^\infty(K, \mathbf{R})$. Entonces el subconjunto A de mapeos suaves de $C^\infty(K, \mathbf{R})$, cuyos puntos críticos son todos no degenerados y que tienen distintas imágenes, es abierto y denso en τ_c , i.e., A es residual en $C^\infty(K, \mathbf{R})$.*

En vista del teorema anterior, el lema de Morse provee una clasificación completa *hasta* un conjunto residual de estos mapeos suaves en $C^\infty(K, \mathbf{R})$, i.e., dichos mapeos poseen una *propiedad genérica* en $C^\infty(K, \mathbf{R})$ con la topología compacto-abierta. A estos mapeos se les llama *mapeos de Morse*, y así podemos establecer que los mapeos de Morse son *genéricos* en $C^\infty(K, \mathbf{R})$ en esta topología.

8. LA NO DETERMINACIÓN DERECHA FINITA

En el caso de variable compleja, cualquier mapeo suave es finitamente determinado en un punto crítico de su dominio, debido a que la contraparte de suave ahora es ser analítico y por definición f es analítica si tiene un desarrollo en series de Taylor en cada punto de un dominio abierto de \mathbf{C} ; así, como consecuencia del lema de Hadamard, obtenemos la determinación derecha finita de tal mapeo. No obstante, en variable real se mostró en la primera parte de esta presentación (véase el ejemplo 10 de [3]), que no todo mapeo suave es analítico. A tales mapeos, diremos que *no tienen k -determinación derecha $\forall k \in \mathbf{N}$* .

9. ESTABILIDAD

Para definir la estabilidad de un mapeo suave, establezcamos los siguientes preliminares.

La topología de Whitney en $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$

Volvamos a la sección 5 y establezcamos una generalización de la topología compacto-abierta. Para ello, primero definamos los denominados *Jets*.

Sean U y V abiertos de \mathbf{R}^n y \mathbf{R}^p , respectivamente, y sean f y $g: U \rightarrow V$ suaves y $x \in U$.

Definición 9. *f y g son k -tangenciales en el punto x si*

$$D^l f(x) = D^l g(x) \quad \forall l \in \mathbf{N}^n \quad \text{con} \quad |l| \leq k \quad \text{y} \quad f(x) = g(x). \quad (23)$$

De esta manera, establecemos la siguiente relación de equivalencia que notaremos por $\sim_{k \text{ en } x}$, en $C^\infty(U, V)$ de la siguiente manera: $f \sim_{k \text{ en } x} g$



si son *k-tangenciales* en el punto x . A las clases de equivalencia de este espacio cociente, le llamaremos un *k-jet* de un mapeo suave f de U a V , con *fuelle* x y *destino* y . Al espacio cociente correspondiente lo denotamos por $J^k(U, V)_{x,y}$ y es el conjunto de *k-jets* de U a V , con *fuelle* x y *destino* y . Así $z \in J^k(U, V)_{x,y}$, si z pertenece a la clase de equivalencia de f , diremos que z es el *k-jet* de f en x , y escribiremos $z = J^k f(x)$. Podemos así identificar a $J^k f(x)$ con la expansión de Taylor de orden k de f en x , en palabras diremos que:

Definición 10. $J^k f(x)$ consiste de todas las funciones suaves de $U \rightarrow V$ cuyo desarrollo de Taylor en el punto x coincide con el de f , hasta orden k .

Ahora definamos la unión disjunta de los $J^k(U, V)_{x,y}$ como el conjunto

$$J^k(U, V) = \bigcup_{\substack{x \in U \\ y \in V}} J^k(U, V)_{x,y}. \quad (24)$$

A través de funciones coordenadas inducidas de las coordenadas usuales de \mathbf{R}^n y \mathbf{R}^p , respectivamente (véase [2] para los detalles), dichas funciones definen una estructura de topología producto en el espacio: $J^k(U, V)$ de los *k-jets*, como

$$J^k(U, V) = U \times V \times J^k(n, p), \quad (25)$$

donde $J^k(n, p)$ es un espacio vectorial de dimensión finita donde

$$J^k f(x) = \left\{ x, f(x), (D^l f_j(x))_{\substack{1 \leq j \leq p \\ |l| \leq k}} \right\}$$

Así, definamos la topología de Whitney C^∞ de la siguiente manera

Definición 11.

i) Consideremos $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$

ii) Para un entero k fijo. Sea $U \subset J^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ como en (24). Denotemos por

$$M(U) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p): J^k f(\mathbf{R}^n) \subset U\}. \quad (26)$$

Observación: $M(U \cap V) = M(U) \cap M(V)$.

Si U es un abierto en $J^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, entonces $\{M(U): k \in \mathbf{N}\}$ forman una base para una topología, que llamaremos la topología de Whitney C^∞ .

Dentro de las propiedades que se pueden destacar respecto a esta topología son las siguientes:



Teorema 4. $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ es un espacio de Baire en la topología de Whitney C^∞ . Compárese con el teorema 3.

Teorema 5. $f_n \rightarrow f$ en la topología de Whitney C^∞ si y sólo si existe un subconjunto K compacto de \mathbf{R}^n tal que $J^k f_n \rightarrow J^k f$ uniformemente sobre K y $f_n \equiv f$ en $\mathbf{R}^n/K \forall n > N$ para alguna $N \in \mathbf{N}$.

Corolario 1. Si $C^\infty(K, \mathbf{R}^p)$ donde K es compacto de \mathbf{R}^n , la topología compacto-abierta y la topología de Whitney C^∞ coinciden.

En este sentido, decimos que la topología de Whitney C^∞ es una generalización de la topología compacto-abierta.

Mapeos equivalentes

Teorema 6 (teorema de la función inversa). Sea $U \subseteq \mathbf{R}^n$ abierto y $p \in U$ y sea $\phi: U \rightarrow \text{Ran } \phi \subseteq \mathbf{R}^n$ tal que $\phi \in C^k(U, \mathbf{R}^n)$ con $\text{Ran } \phi$ abierto. Además, supongamos que $d\phi_p$ es invertible, entonces existe un abierto $V \subset \text{Ran } \phi$ de $\phi(p)$ y un mapeo $\psi: V \rightarrow U$ con $\psi \in C^k$, tal que $\phi \circ \psi(y) = \text{Id}(y) = y \forall y \in V$ y $\psi \circ \phi(x) = x \forall x \in \psi(V)$.

Definición 12. Sea $f: U \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \text{Ran } f \subseteq \mathbf{R}^n$ con $f \in C^k(U, \mathbf{R}^n)$ inyectiva. Decimos que tal mapeo es un difeomorfismo si existe un abierto $V \subseteq \text{Ran } f$ y un mapeo suave $f^{-1}: V \rightarrow \text{Ran } g$, con $f^{-1} \in C^k$, tal que $f^{-1} \circ f(x) = \text{Id}(x) = x \forall x \in U$ y $f \circ f^{-1}(y) = \text{Id}(y) \forall y \in V$.

Ejemplo 1. En términos de difeomorfismos, enunciaremos el teorema de la función inversa diciendo que: si un mapeo f satisface las hipótesis de dicho teorema, entonces f es localmente un difeomorfismo para cada punto de U .

Ejemplo 2. $f(x) = x^3$. Dado que $f'(0) = 0$, el teorema de la función inversa no garantiza que dicho mapeo sea un difeomorfismo. De hecho no lo es, ya que el teorema 6 establece que $f \in C^k$ es localmente invertible si y sólo si $f^{-1} \in C^k$. Así que si f^{-1} existe y $f^{-1} \circ f = \text{Id}$, entonces $df^{-1}(f(x)) \cdot df(x) = \text{Id} \Rightarrow df$ es invertible en una vecindad del cero, lo cual es una contradicción, a pesar de que $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ existe, pero no es suave.

Ejemplo 3. Pero no obstante, $f_\varepsilon(x) = x^3 + \varepsilon x$ para $0 < |\varepsilon| < 1$, ya que $f'_\varepsilon(0) = \varepsilon \neq 0$; por el teorema de la función inversa, este si es un difeomorfismo.

Definición 13. Sean f y f' mapeos en $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. f es equivalente a f' si existen un difeomorfismo $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $h: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ tales que el



diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^p \\
 g \downarrow & & \downarrow h \\
 \mathbf{R}^n & \xrightarrow{f'} & \mathbf{R}^p
 \end{array}$$

conmuta, i.e.,

$$h \circ f = f' \circ g, \tag{27}$$

i.e., son iguales salvo difeomorfismos.

Definición 14. Sea $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Entonces f es estable si existe una vecindad \mathcal{N}_f de f en la topología de Whitney C^∞ , tal que para cada $f' \in \mathcal{N}_f$, f' es equivalente a f . En otras palabras, diremos que f es estable si f se comporta igual en toda una vecindad de ésta en las topologías de Whitney, salvo difeomorfismos.

Compárese la definición anterior con relación de equivalencia dada al principio de la sección 1.

Las funciones de Morse, ejemplo de mapeos estables

Lo anterior se sigue inmediatamente del lema de Morse y de (14) de la sección 3. Ilustremos lo anterior con el mapeo $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dado por

$$f(x) = x^2,$$

y las pequeñas perturbaciones de la f , como

$$f_\varepsilon(x) = x^2 + \varepsilon x \quad \text{para } 0 < |\varepsilon| < 1,$$

que no alteran el comportamiento de la f , salvo *difeomorfismos locales*, i.e., x^2 es un *mapeo estable*. En este caso, consideremos las ecuaciones paramétricas de la parábola y de dichas perturbaciones $f, f_\varepsilon: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ dadas por $f(t) = (t, t^2)$ y $f_\varepsilon(t) = (t, t^2 + \varepsilon t)$, respectivamente. Y definamos los difeomorfismos $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ como $g(t_1, t_2) = (t_1, t_2 - \varepsilon/2)$ y $h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ por $h(t_1, t_2) = (t_1, t_2 + \varepsilon^2/4)$, que cumplen (27) trivialmente (veáse la figura 2).

De hecho, también es cierto que si un mapeo es estable es de Morse con valores críticos distintos.



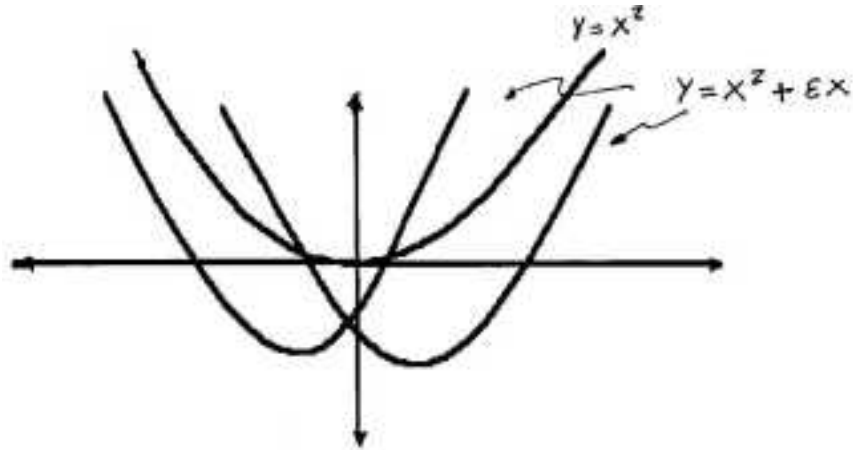


FIGURA 2.

$f(x) = x^3$ como un mapeo suave inestable

Al contrario del mapeo $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, dado por

$$f(x) = x^3,$$

en el cual el *cero* es un punto crítico *degenerado* ya que

$$f'(0) = f''(0) = 0,$$

y sus perturbaciones como

$$f_\varepsilon(x) = x^3 + \varepsilon x \quad \text{para } 0 < |\varepsilon| < 1,$$

que dicho sea de paso, como $f'_\varepsilon(x) = \varepsilon$ son difeomorfismos locales, pero no se comportan localmente como $f(x) = x^3$, *i.e.*, para f y $f_\varepsilon(x)$ no existen difeomorfismos h y g tales que $h \circ f = f_\varepsilon \circ g$ ya que, de existir tales mapeos, entonces $f = h^{-1} \circ f_\varepsilon \circ g$ es un difeomorfismo y entonces $f^{-1}(y) = (g^{-1} \circ f_\varepsilon^{-1} \circ h)(y) = \sqrt[3]{y}$ es suave, lo cual es una ¡contradicción!

Es razonable requerir que los mapeos que sirven para modelar las aplicaciones físicas sean estables, debido a las imprecisiones de las observaciones que se realizan al construir dichos modelos; la única propiedad física significativa de estos mapeos es que sean cualitativamente invariantes bajo estas pequeñas perturbaciones. Desde este punto de vista, el lema de Morse pudiera proveer una descripción local suficientemente completa de los mapeos suaves.



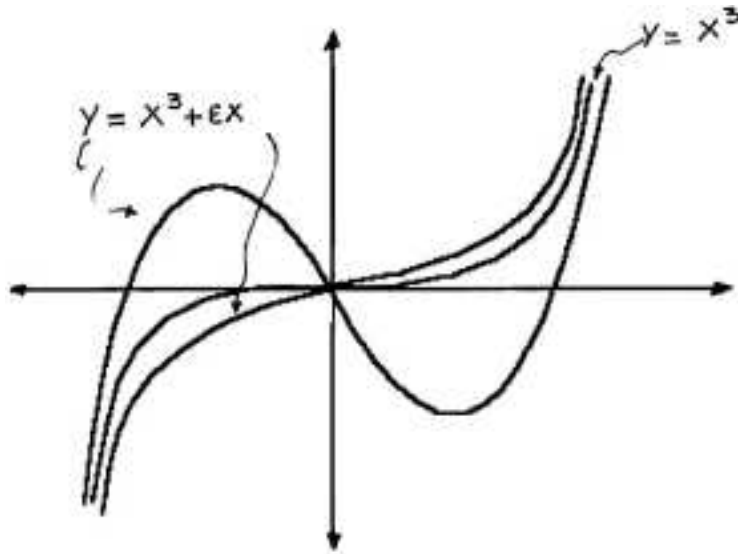


FIGURA 3.

10. FAMILIAS DE DEFORMACIONES

René Thom ha enfatizado que tanto en matemáticas como en las aplicaciones a la física, el interés no es tratar sólo con mapeos suaves individualmente, sino con familias parametrizadas o deformaciones de mapeos. Singularidades degeneradas aparecen naturalmente en la clasificación de dichas familias de funciones.

Por ejemplo, aunque la función $f(x) = x^3$ no es estable, la familia a un parámetro $f_t(x) = x^3 + tx$ es una familia de funciones estables, como se observó en el párrafo anterior.

El estudio de todas las posibles deformaciones de una singularidad degenerada, la cual es determinada derecha finita (o equivalentemente de codimensión finita), *induciendo* un “desdoble semiuniversal” del cual todas las deformaciones pueden ser obtenidas.

R. Thom halló siete catástrofes elementales [10], las cuales están asociadas a desdobles semiuniversales de una singularidad de “codimensión” a lo más cuatro (*i.e.*, el cual admite un desdoble semiuniversal en a lo más cuatro parámetros). Existe una clasificación finita de estas funciones con puntos críticos no degenerados. Una clasificación similar es posible en codimensión cinco; pero en codimensión a lo más seis, las formas normales locales contienen necesariamente parámetros o “moduli”.

Las familias de funciones a cinco parámetros localmente estables son genéricas. Estas familias son localmente desdobles semiuniversales de las singularidades de codimensión a lo más cinco.



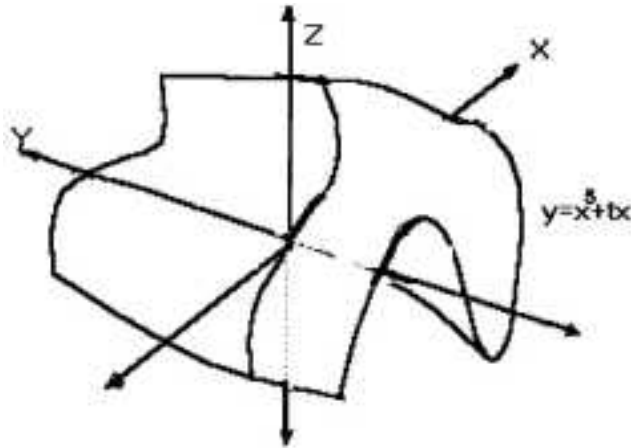


FIGURA 4.

Si $k \geq 6$, las familias de funciones localmente estables a k -parámetros definidas sobre variedad suave no son densas en el espacio de todas las funciones sobre dicha variedad.

La teoría de singularidades de mapeos suaves fue desarrollada en seis artículos fundamentales de John Mather, usando su generalización del teorema de división de Bernard Malgrange.

Estas notas, termina diciendo Edward Bierstone en su introducción, se derivaron de un curso que impartió en la Universidad de Toronto entre 1977–1978. Mucho del material estuvo basado sobre notas no publicadas pero extensamente distribuidas de John Mather sobre “equivalencia derecha”.

11. DIAGRAMAS DE LAS SIETE CATÁSTROFES ELEMENTALES

Establezcamos primeramente las siguientes definiciones y resultados [10].

Definición 15. Sean $f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ y $x \in \mathbf{R}^n$. Decimos que f, g son equivalentes en x y escribiremos: $f \sim_x g$ si existe un vecindad $W \subset \mathbf{R}^n$ de x tal que $f|W = g|W$.

Definición 16. Al conjunto cociente determinado por la relación de equivalencia anterior lo denotaremos por $\varepsilon(n, p)$ y a las clases de equivalencia correspondientes les llamaremos gérmenes. Así, el germen de un mapeo suave de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^p en un punto x , es la clase de equivalencia de todos los mapeos suaves de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^p , que son equivalentes. Convengamos, en utilizar la misma notación para un germen y el mapeo representante de la clase correspondiente.



Definición 17. Si $p = 1$ y $x = \bar{0}$, simplemente denotaremos:

$$\varepsilon(n) = \left\{ f: f \text{ es un gérmen en } \bar{0} \text{ de los mapeos suaves de } \mathbf{R}^n \text{ en } \mathbf{R} \right\} \quad (28)$$

Teorema 7. $\varepsilon(n)$ es un álgebra local con único ideal maximal $\mathfrak{m}(n)$, donde

$$\mathfrak{m}(n) = \left\{ f \in \varepsilon(n): f(\bar{0}) = \bar{0} \right\} \quad (29)$$

Definición 18 (Def. 11.11 [10]). Sea $f \in \varepsilon(n)$ con $f(\bar{0}) = \bar{0}$ y $Df(\bar{0}) = 0$ es llamada una singularidad. Y denotemos por Σ_f el conjunto-gérmen definido por

$$\Sigma_f = \left\{ x \in \mathbf{R}^n: Df(\bar{0}) = 0 \right\}.$$

i.e., Σ_f es el gérmen en $\bar{0}$ de un subconjunto de \mathbf{R}^n .

Definición 19 (Def. 14.1 [10]). Sea $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ una singularidad. Un desdoble a r -parámetros o deformación de η es un gérmen $f \in \mathfrak{m}(n+r)$ tal que $f|_{\mathbf{R}^n} = \eta$. Y se denotó por (r, f) .

Definición 20 (Def.14.11 [10]). El co-rango de una singularidad $\eta \in \mathfrak{m}(n)$, que denotamos por $\text{corank } \eta$ es el $\text{corank}(\partial^2 \eta / \partial x_i \partial x_j(0))$, i.e., es el co-rango de la matriz hessiana de η en cero, o bien, es la forma cuadrática dada por el 2-jet.

Lema 5 (Lema 14.15 [10]). Si la codimensión de η es finita (finitamente determinada) entonces

$$\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)/\langle \partial \eta \rangle) = \text{codim } \eta + n.$$

La teoría de las *catástrofes elementales* es local por naturaleza, de ahí que es una familia de funciones potenciales $V_u: X \rightarrow \mathbf{R}$, donde X es un subconjunto de \mathbf{R}^n , conteniendo una vecindad del origen, y los parámetros u definidos en un subconjunto abierto $U \subset \mathbf{R}^r$. Asumiremos que $X = \mathbf{R}^n$. Una catástrofe en particular determina un gérmen $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$ (i.e., un gérmen $\eta: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$, $D\eta(0) = 0$) el cual es un desdoble a un gérmen (r, f) , $f \in \mathfrak{m}(n+r)$. Las coordenadas en \mathbf{R}^r del desdoble η son ambos parámetros externos al modelo.

Se dan a continuación una serie de definiciones: *Un régimen local, un proceso, un punto regular, un punto castatrófico, la morfología de una catástrofe y el conjunto catástrofe*, destacando los siguientes conjuntos.



Definición 21. Dada una singularidad η y su desdoble f

$$\Sigma_f = \{(x, u) \in \mathbf{R}^n \times U : d_X f(x, u) = 0\}, \quad (30)$$

donde $d_X f(-, u) = d(f | \mathbf{R}^n x \{u\})$.

Definición 22. Para cada u , los puntos de Σ_f restringidos a $\mathbf{R} \times \{u\}$ dan el mínimo y máximo locales (regímenes) de f en u .

$$\Delta_f = \left\{ (x, u) \in \Sigma_f : d_X^2 f(x, u) \text{ es degenerada} \right\}. \quad (31)$$

Asumiendo (Capítulos 15 y 17 de [10])

$$\begin{aligned} \text{Si } \eta \text{ es un singularidad con codimensión } \leq 4 \\ \text{codim } \eta \leq 4 \Leftrightarrow \dim \mathfrak{m}(n) / \langle \partial \eta \rangle \leq 4 \\ \mathfrak{m}(n)^5 \subset \langle \partial \eta / \partial x_i \rangle \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^6 \subset \mathfrak{m}(n) \langle \partial \eta \rangle \\ \eta \text{ es 6-determinada.} \end{aligned}$$

Obtenemos el

Teorema 8 (Teo. 15.1 [10]). *La regla de la siete catástrofes elementales de Thom.* Salvo la adición de una forma cuadrática en otras variables y multiplicación por ± 1 , una singularidad de $1 \leq \text{codim} \leq 4$ es equivalente derecha a una de las siguientes.

El dobléz

$$\eta = x^3,$$

$$\text{codim} = 1.$$

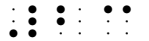
Desdoble universal:

$$f(x, u) = x^3 + ux,$$

$$\Sigma_f = \{(x, u) : 3x^2 + u = 0\},$$

$$\Delta_f = \{(0, 0)\},$$

$$D_f = \{0\}.$$



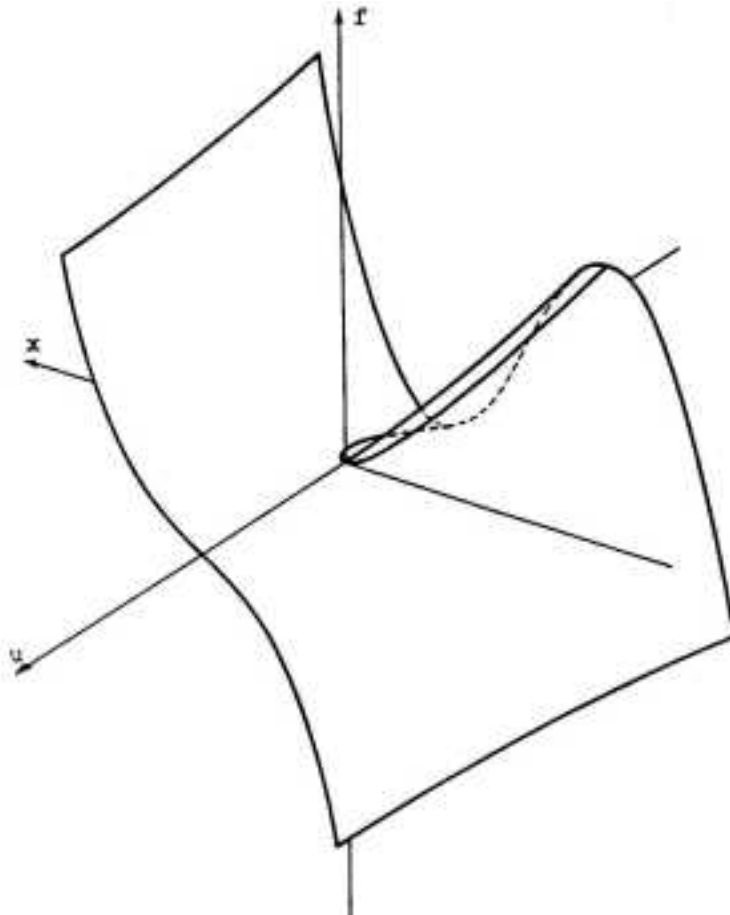


FIGURA 5. El dobléz..

La cúspide

$$\eta = x^4,$$

codim = 2.

Desdoble universal:

$$f(x, u, v) = x^4 - ux^2 + vx,$$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v) : 4x^3 - 2ux + v = 0\},$$



$$\Delta_f = \{(x, u, v) \in \Sigma_f : 12x^2 - 2u = 0\},$$

$$D_f = \{(u, v) : 27v^2 = 8u^3\}.$$

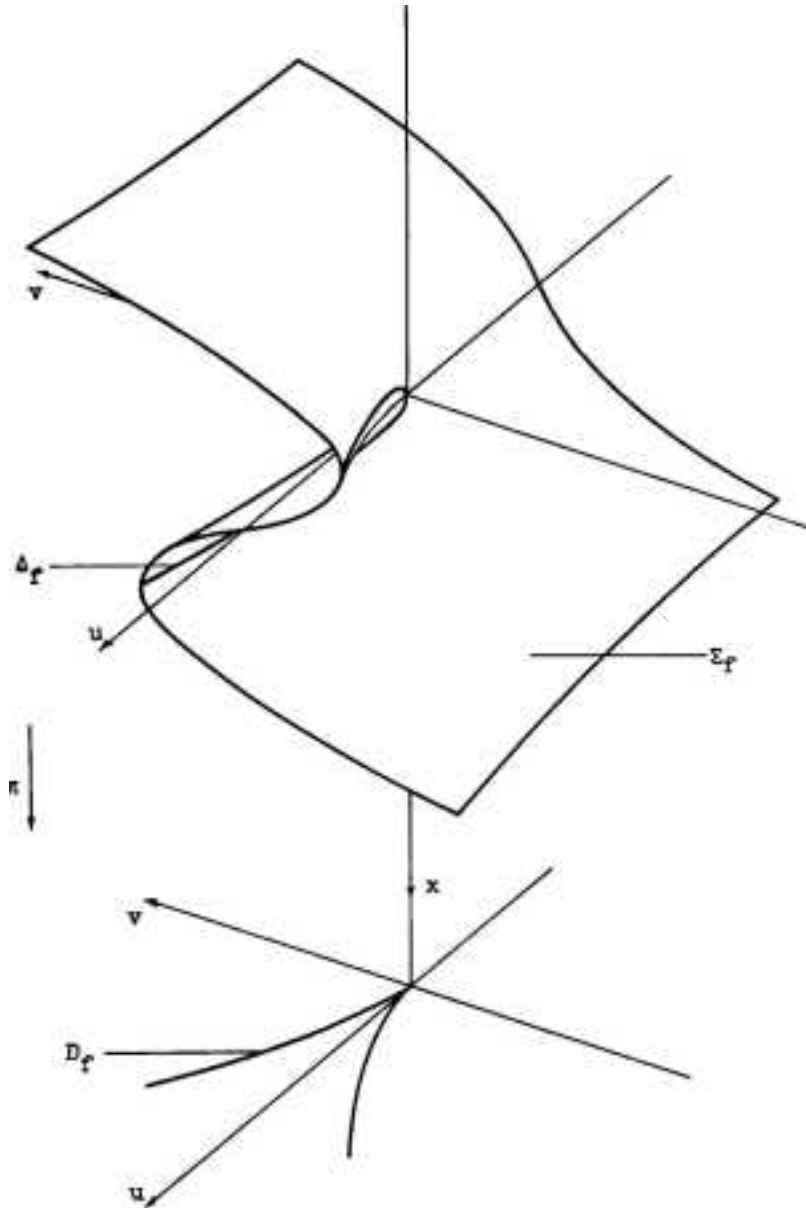


FIGURA 6. La cúspide..



La cola de golondrina

$$\eta = x^5,$$

$$\text{codim} = 3.$$

Desdoble universal:

$$f(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx,$$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v, w) : 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\},$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v, w) \in \Sigma_f : 20x^3 + 6ux + 2v = 0\},$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists x \text{ tal que } 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0 \\ \text{y } 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}.$$

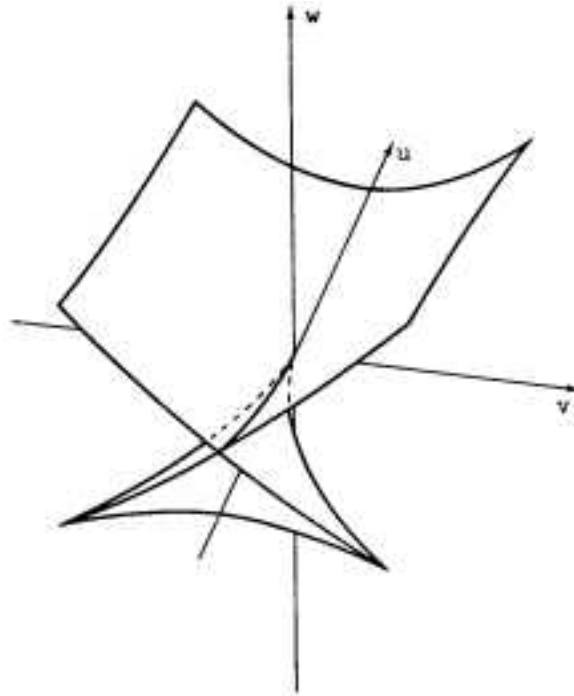


FIGURA 7. La cola de golondrina..



El umbílico hiperbólico

$$\eta = x^3 + y^3,$$

$$\text{codim} = 3.$$

Desdoble universal:

$$f(x, y, u, v, w) = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy,$$

$$\Sigma_f = \{(x, y, u, v, w) : 3x^2 + wy - u = 3y^2 + wy - v = 0\},$$

$$\Delta_f = \left\{ (x, y, u, v, w) \in \Sigma_f : \det \begin{pmatrix} 6x & w \\ w & 6y \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists(x, y)$$

$$\text{con } u = 3x^2 + wy, \quad v = 3y^2 + wy, \quad w^2 = 36xy\}.$$

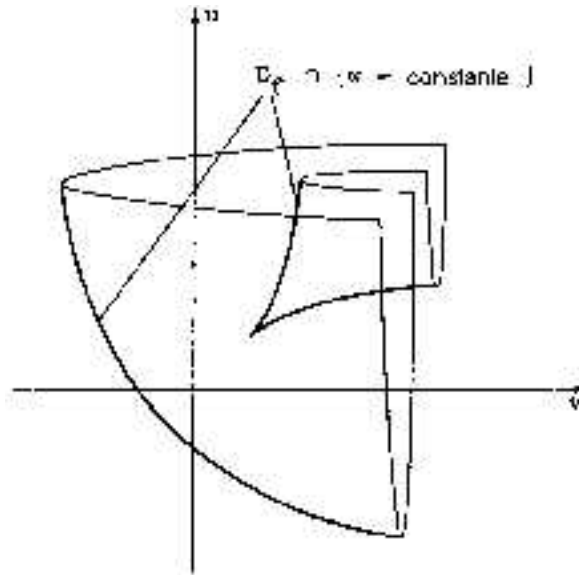


FIGURA 8. El umbílico hiperbólico..

El umbílico elíptico

$$\eta = x^3 - xy^2,$$

$$\text{codim} = 3.$$



Desdoble universal:

$$f(x, y, u, v, w) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy,$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists x, y \text{ tales que } u = x^2 - y^2, v = 2wx, w = -2xy + 2wy, x^2 + y^2 = w^2\}.$$

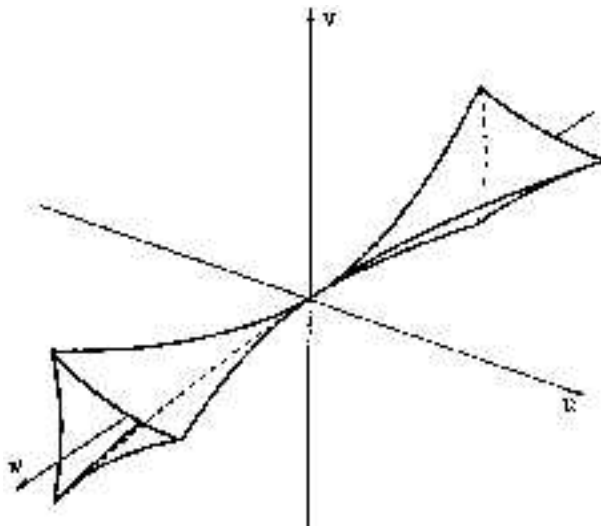


FIGURA 9. El umbílico elíptico..

La mariposa

$$\eta = x^6,$$

$$\text{codim} = 4.$$

Desdoble universal:

$$f(x, y, u, v, w, t) = x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx.$$

Consideremos un reloj de D_f . Fijando (u, t) , la intersección de D_f con el plano $v-w$ genera una curva. Moviéndonos alrededor del círculo unitario



en el plano $u-t$, se obtiene el diagrama de la figura 10.

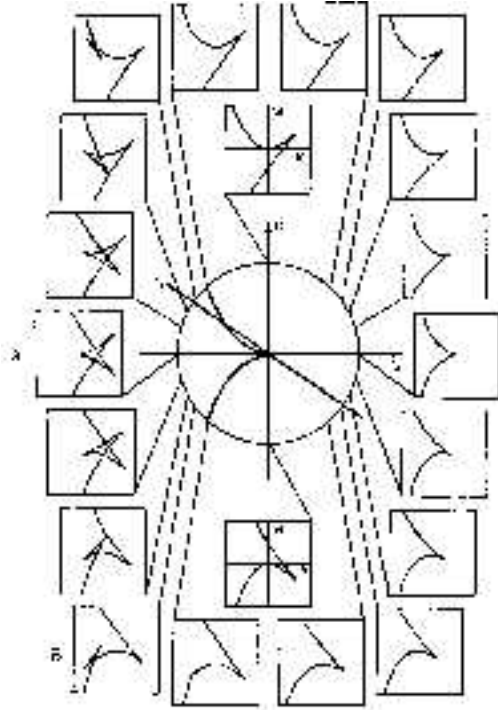


FIGURA 10. La mariposa..

El umbílico parabólico

$$\eta = x^2y + y^4,$$

codim = 4.

Desdoble universal:

$$f(x, y, u, v, w, t) = x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy.$$

El reloj de D_f se muestra en el diagrama de la figura 11.

Para finalizar, de la misma referencia [10] extrajimos la siguiente aplicación.



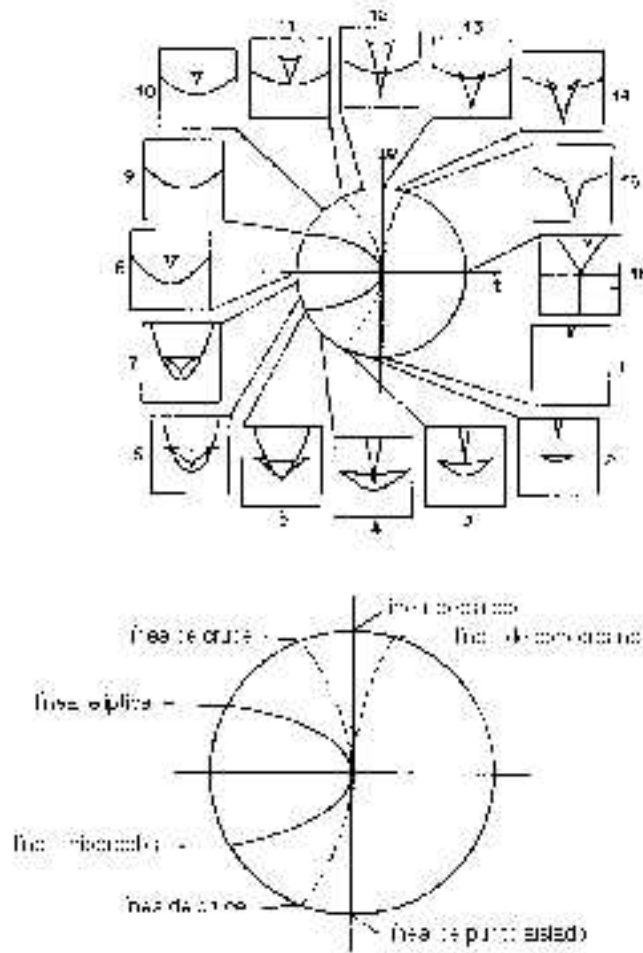


FIGURA 11. El umbflico parabólico..

12. ESTABILIDAD-TIEMPO

La teoría discutida anteriormente depende de la clasificación de los gérmenes estables salvo equivalencia.

Un hecho significativo es que los gérmenes de un difeomorfismo arbitrario sobre un abierto U son permitidos. Supongamos que U puede ser foliado por subespacios de tiempo constante, entonces existen coordenadas sobre U donde uno de los ejes es el tiempo. Se insiste que cualquier cambio de coordenadas en U permite mapeos de tiempo constante si se hace constante la variable temporal. Los mapeos que resultan equivalentes en este sentido son llamados t -equivalentes y los estables son llamados t -estables.



Así es posible dar una clasificación de los mapeos t -estables. La clasifi-

cación para las catástrofes elementales que resulta es mas grande, pero aún es finita para dimensiones bajas. Un desdoble t - estable de la cúspide es

$$f(x, u, v, t) = x^4 + ux^2 + tx + ux + v^2x,$$

donde el eje del tiempo tiene coordenada t . Un desdoble donde el tiempo corra a lo largo del eje u y tangente al punto cúspide pudiera no ser estable y así, si el desdoble modela algún fenómeno natural, D_f puede ser un conjunto catástrofe, *i.e.*, un conjunto de puntos no regulares en U . Un diagrama de D_f se muestra en la figura 12. La intersección con los planos de tiempo constante también se muestran en la figura.

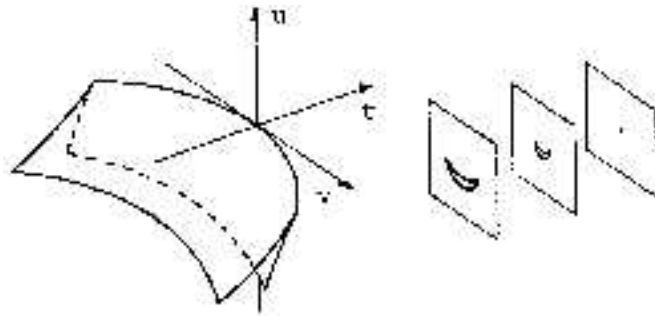


FIGURA 12.

Por ejemplo, para un animal, alimentarse es restaurar sus reservas de energía química y es el proceso regulativo más fundamental. Dicho proceso también es periódico, de ahí que se puede describir por medio de un ciclo, que llamaremos el ciclo-predación.

Aquí nos encontramos con una dificultad fundamental: predación implica la presencia de una presa, esto es, la existencia de un ser externo al propio animal. Alimentación es fundamentalmente engullir una presa introduciéndola en el organismo (la phagocytosis para los organismos unicelulares). De ahí que al describir el ciclo-predación, usamos la más simple de las catástrofes para describir la captura, la catástrofe Riemann-Hugoniot (la cúspide). El ciclo-predación es un círculo unitario en el uv -plano de desdoble

$$V = \frac{x^4}{4} + \frac{ux^2}{2} + vx.$$

Este círculo se encuentra con la curva $4u^3 + 27v^2 = 0$ que se bifurca en dos puntos J, K . En J aparece un mínimo nuevo: un actor. En K aparece nuevamente otro actor capturando al anterior, K es un punto catastrófico para la captura. Pero si continuamos describiendo el círculo unitario (C), vemos



que, después regresa el predador a un estado-hambriento ¡convirtiéndose en su propio predador!

Esta afirmación aparentemente paradójica puede en realidad implicar la explicación de una cantidad considerable de hechos en mitología (*The Werewolf*), en etnología (rituales de cacería implicados en la simulación general del predador por los cazadores), en el pensamiento mágico en general...



FIGURA 13. De *Un esquema de dinámica global para embriología de vertebrados*, por René Thom. “el gato cazando al ratón”..

Agradezco la revisión cuidadosa y las sugerencias del referí.



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Guillemin, M. y V. Golubysky, *Stable Mappings and their Singularities*, Springer-Verlag, Nueva York, Heidelberg, Berlín, 1973.
- [2] Bierstone, E., *An Introduction to Singularities of Smooth Functions*, Departamento de matemáticas, Universidad de Toronto, Canadá.
- [3] Gómez, G. y H. Blancarte, “¿De qué trata la teoría de singularidades y catástrofes? Primera parte”, *Revista Eureka* **11**, México, noviembre de 1997.
- [4] Birkoff, G. y S. MacLane, *Algebra*, segunda edición, Macmillan Publishing Co., Nueva York, 1979.
- [5] Rudin, W., *Principios de análisis matemático*, tercera edición, McGraw-Hill de México S. A., 1980.
- [6] Loomis, L. H. y S. Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing, Inc., 1968.
- [7] Fulks, W., *Cálculo avanzado*, primera edición, Editorial Limusa S. A., México, 1973.
- [8] Reed, M. y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. 1. Functional Analysis*, Academic Press, Inc., 1972.
- [9] Kolmogórov, A. N. y S. V. Fomín, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, segunda edición, Editorial Mir, Moscú, 1975.
- [10] Bröcker, T. H. y L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge University Press, 1975.

