

Una interpretación de la transformada de Laplace

Víctor Manuel Hernández Guzmán

Licenciatura en Instrumentación y
Control de Procesos
Facultad de Ingeniería, UAQ

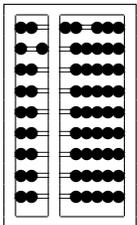
RESUMEN

Se repasan brevemente las series de Fourier, el par transformado de Fourier y el par transformado de Laplace para hacer ver que, usando este último método, una función puede ser interpretada como formada por la suma de una gran cantidad de funciones sinusoidales amortiguadas exponencialmente. También se presenta un programa de MATLAB que permite verificar esta idea de manera numérica. El objetivo de este trabajo es completamente didáctico por lo que los conceptos se presentan de manera sencilla dejando a un lado el rigor matemático profundo.

INTRODUCCIÓN

En los cursos de matemáticas para ingenieros es común estudiar la transformada de Laplace a través de su definición, sus propiedades y sus aplicaciones. Sin embargo, normalmente no se hace nada por tratar de entender lo que significa. Este tipo de comprensión de los problemas es importante para que un profesionista sea capaz de resolverlos eficientemente cuando se le presentan. Es decir, sólo es posible dar la mejor solución a un problema de cualquier tipo cuando éste se entiende por completo, incluyendo el aspecto teórico del mismo. Por otro lado, es necesario entender bien los conceptos teóricos para aplicarlos correctamente a la solución de problemas de tipo práctico, y este último aspecto se ve fuertemente beneficiado si se hacen interpretaciones de los resultados teóricos.

Normalmente, en los libros para ingenieros no se menciona ninguna interpretación de la transformada de Laplace, aunque es conocido que la transformada de Fourier puede obtenerse a partir de la transformada de



Laplace simplemente haciendo cero la parte real de la variable compleja s .

En este trabajo se hace un repaso de las series de Fourier, la transformada de Fourier y un método muy común encontrado en la literatura para, a partir de esta última, obtener la transformada de Laplace. Estudiando esto con detalle es posible darse cuenta de que la transformada de Laplace puede ser interpretada como un método que permite descomponer una función no periódica en la suma de una gran cantidad de funciones sinusoidales amortiguadas exponenciales. Con el fin de ilustrar esto, se propone un método para el cálculo numérico de la transformada de Laplace y de la transformada inversa de Laplace, y se aplica, a manera de ejemplo, a tres funciones diferentes: un escalón unitario, una exponencial y una senoidal.

SERIES DE FOURIER

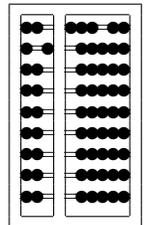
Una función periódica $f(t)$ de periodo $2p$ se puede representar por la serie [1], [2], [3]:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \right] \quad (1)$$

donde los coeficientes a_0, a_n y b_n son conocidos como los coeficientes de Fourier, y se pueden calcular como:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \end{aligned} \quad (2)$$

Las ecuaciones (2) son conocidas como las fórmulas de Euler y la serie (1) es conocida como la serie de Fourier de $f(t)$. Nótese que de acuerdo con (1), una función periódica se puede representar como la suma de señales cosenoidales y senoidales de frecuencias discretas diferentes que crecen desde cero hasta infinito. Estas funciones en ocasiones son llamadas las componentes de frecuencia de $f(t)$. Los coeficientes de Fourier representan la contribución de las diferentes componentes de frecuencia a la función $f(t)$. Una observación importante es que (1) asume que $f(t)$ es periódica para todo instante t .



No cualquier función periódica puede representarse por una serie de Fourier. Las condiciones bajo las cuales una función puede ser representada por una serie de Fourier son conocidas como las condiciones de Dirichlet y son dadas en el siguiente teorema:

Teorema 1. [1]

Si $f(t)$ es una función periódica acotada que en todo periodo tiene un número finito de máximos y mínimos y un número finito de puntos de discontinuidad, entonces la serie de Fourier (1) converge puntualmente (véase [12]) a $f(t)$ en todos los puntos en los que $f(t)$ es continua y converge al promedio de los límites por la derecha y por la izquierda (véase [3]) de $f(t)$ en cada punto donde ésta es discontinua.

Definición 1. [3]

Se dice que una función $f(t)$ es par si satisface:

$$f(-t) = f(t) \quad \text{para toda } t \quad (3)$$

y se dice que es impar si:

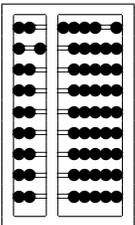
$$f(-t) = -f(t) \quad \text{para toda } t. \quad (4)$$

Debido a que la función coseno es par y el seno impar, bajo ciertas condiciones de simetría en $f(t)$ la serie de Fourier puede estar formada sólo por términos cosenoidales o senoidales como se establece a continuación.

Teorema 2. [1]

Si $f(t)$ es una función periódica par, los coeficientes de la serie de Fourier de $f(t)$ están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= 0, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5)$$



Teorema 3. [1]

Si $f(t)$ es una función periódica impar, los coeficientes de la serie de Fourier

de $f(t)$ están dados por:

$$\begin{aligned} a_n &= 0, & \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt, & \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Por otro lado, cualquier función periódica $f(t)$ se puede expresar como la suma de dos funciones componentes, de las cuales una es par y la otra impar [3]. Así, de acuerdo a los teoremas 2 y 3, la primera da lugar a una serie de Fourier formada sólo por cosenos y la segunda a una serie de Fourier formada sólo por senos. Esto explica de algún modo porqué las series de Fourier, en general, contienen términos cosenoidales y senoidales.

La serie de Fourier (1) puede escribirse de diferentes maneras que, sin embargo, representan resultados idénticos. A continuación se presentan tres de dichas formas alternativas [1]:

$$1) \quad f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}t - \gamma_n\right), \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \gamma_n &= \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right); \end{aligned}$$

a_0 , a_n y b_n están dados como en (2).

$$2) \quad f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t + \delta_n\right), \quad (8)$$

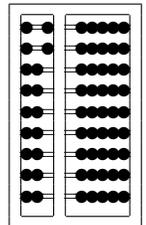
donde

$$\delta_n = \tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right);$$

A_0 y A_n están dados como en (7).

Nótese que los desfases γ_n y δ_n son diferentes en cada término de la serie y por esta razón (7) y (8) pueden representar cualquier función periódica $f(t)$ aunque no sea par ni impar.

$$3) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n\pi/p)t}, \quad (9)$$



donde

$$C_n = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(t)e^{-i(n\pi/p)t} dt,$$

$$e^{\pm i(n\pi/p)t} = \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \pm i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right).$$

De acuerdo con (9), $f(t)$ está formada por una parte real y una parte imaginaria. Sin embargo, si $f(t)$ es una función real esto implica que su parte imaginaria debe ser cero y, por lo tanto, todos los términos imaginarios de (9) deben cancelarse entre sí. Esto no significa que (9) sólo contendrá términos cosenoidales ya que, al ser C_n también un número complejo, la parte real de $f(t)$ estará formada por términos cosenoidales y senoidales. Nótese que en (9) la serie de Fourier de $f(t)$ está formada por términos cuyas frecuencias varían de manera discreta desde $-\infty$ hasta $+\infty$ pasando por cero. Las frecuencias negativas no tienen significado físico, por lo que (9) sólo representa una manera abstracta de representar a $f(t)$ que, sin embargo, es una manera conveniente de escribir una serie de Fourier para definir la integral de Fourier.

LA INTEGRAL DE FOURIER

La integral de Fourier de una función no periódica $f(t)$, se define como [1], [3], [4]:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \tag{11a}$$

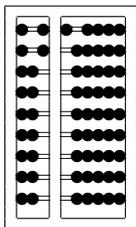
donde

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{11b}$$

$F(\omega)$, función de la variable continua ω , es conocida como la transformada de Fourier de $f(t)$ y las dos expresiones anteriores son conocidas como par de transformadas de Fourier. Por otro lado, es claro que $F(\omega)$ es una función compleja. Es posible mostrar que si $f(t)$ es una función real, entonces la parte real de $F(\omega)$ es una función par y su parte imaginaria es impar [3].

En [1], [3], [4] se muestra que (9) es la versión discreta de (11a), (11b). A continuación se presenta un resumen sencillo e intuitivo del procedimiento seguido. En (11a) y (11b) la función $f(t)$ es no periódica. Esto equivale a decir que $f(t)$ es una función con periodo $2p \rightarrow \infty$. Defínase:

$$\omega = \frac{n\pi}{p}; \tag{12}$$



si $f(t)$ “tiende” a una función periódica entonces el periodo $2p$ toma valores finitos y ω , originalmente una variable continua, “tiende” a la variable discreta $n\pi/p$ que toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$. Así, $d\omega$ es la diferencia entre dos valores consecutivos de ω , correspondientes a dos valores consecutivos de n representados por $n + 1$ y n :

$$d\omega = \frac{(n + 1)\pi}{p} - \frac{n\pi}{p} = \frac{\pi}{p} \tag{13}$$

Por otro lado, C_n es la versión discreta de $F(\omega)$. Esto puede explicarse del siguiente modo: $f(t)$ es una función no periódica, lo cual es equivalente a decir que el periodo $2p$ tiende a infinito y, como se asume que $f(t)$ está definida para $t \in]-\infty, +\infty[$, entonces los límites de la integral, evaluada en un periodo completo de $f(t)$, cambian de $0, 2p$ a $-\infty, +\infty$. Una vez que (11a) y (11b) se hacen discretas de esta manera, al sustituir la segunda en la primera, se obtienen exactamente (9) y C_n .

A partir de (9) y (11a) se pueden hacer las siguientes observaciones [1], [2], [3], [4]. Una función periódica $f(t)$ puede representarse como la serie infinita de funciones sinusoidales (senos y cosenos) de frecuencias discretas diferentes $n\pi/p$ (C_n es una función discreta de la frecuencia). Por otro lado, puede interpretarse que una función no periódica $f(t)$ está formada por una gran cantidad de funciones sinusoidales de frecuencias continuas diferentes ω ($F(\omega)$ es una función continua de la frecuencia). C_n representa la contribución de las señales sinusoidales de una frecuencia discreta específica $n\pi/p$, a la función periódica $f(t)$, mientras que $F(\omega)$ representa la contribución de las señales sinusoidales de una frecuencia continua específica ω a la función no periódica $f(t)$.

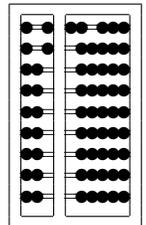
Las condiciones para la convergencia de (11a) a $f(t)$ y la existencia de (11b) son las siguientes [1], [2], [3]:

- 1) $f(t)$ satisface las condiciones de Dirichlet.
- 2) la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ existe.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Una función $f(t)$ no periódica que es cero para $t < 0$, puede representarse como [1], [2], [3], [4]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds \tag{14a}$$



donde

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \tag{14b}$$

$$s = a + i\omega$$

a y ω son números reales.

Nótese el gran parecido entre (11a), (11b) y (14a), (14b). Observando detalladamente se puede apreciar que las primeras se obtienen de las segundas haciendo $a = 0$ y considerando que $f(t) = 0$ para $t < 0$ [9], por lo que el límite inferior de la integral (11b) cambia de $-\infty$ a 0. Inversamente, (14a) y (14b) pueden ser obtenidas [1], [3], [4] a partir de (11a) y (11b) al tratar de obtener un método que permita calcular $F(\omega)$ para funciones $f(t)$ especiales que son cero en tiempos negativos y para las que la integral:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{15}$$

no existe. Es decir, $f(t)$ no se hace cero cuando el tiempo tiende a infinito y, por lo tanto, no se cumple la condición 2) para la existencia de $F(\omega)$.

La idea fundamental [1], [3], [4] es calcular (11a) y (11b) para una función:

$$F(t) = f(t)e^{-at}, \tag{16}$$

con $a > 0$, intentando hacer que $F(t)$ tienda a cero al tender el tiempo a infinito y así lograr la convergencia de (11a) y (11b). Después se hace tender a a cero de modo que:

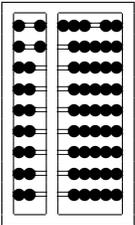
$$f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} F(t); \tag{17a}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-at}e^{-i\omega t} dt \tag{17b}$$

obteniendo finalmente el par de transformadas de Fourier de $f(t)$. El parámetro a recibe el nombre de factor de convergencia porque al ser introducido dentro de una integral divergente hace decrecer el integrando con una rapidez suficiente para hacerla converger.

Una vez encontrado este resultado es natural pensar en elegir el factor de convergencia a de una manera más general en la que sólo interesa la convergencia de las integrales involucradas sin buscar posteriormente el límite de estas últimas cuando a tiende a cero. Así, el par transformado de



Laplace (14a), (14b) puede obtenerse sustituyendo $F(t) = f(t)e^{-at}$ en lugar de $f(t)$ en (11a), (11b), de modo que s es una variable compleja con parte imaginaria ω , idéntica a la variable de Fourier, y una parte real constante a que puede ser positiva, negativa o cero.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, las condiciones para la existencia de (14a), (14b) pueden ser resumidas como sigue [1], [2]:

a) En todo intervalo finito de tiempo $f(t)$ es acotada y tiene a lo más un número finito de máximos y mínimos y un número finito de discontinuidades.

b) Existe una constante real a tal que la siguiente integral es convergente:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-at}| dt = \int_0^\infty |f(t)| e^{-at} dt. \quad (18)$$

Las funciones $f(t)$ que satisfacen a) reciben el nombre de funciones seccionalmente regulares. La condición b) normalmente se reemplaza por otras más restrictiva [1], [2]:

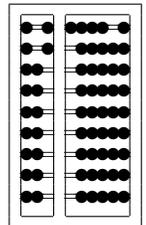
c) Existe una constante α con la propiedad de que $|f(t)| e^{-\alpha t}$ permanece acotado a medida que t tiende a infinito, es decir, existen constantes reales y finitas α , M y T tales que:

$$|f(t)| e^{-\alpha t} < M, \quad \text{para toda } t > T. \quad (19)$$

Las funciones $f(t)$ que cumplen c) son llamadas funciones de orden exponencial. Nótese que el valor de α requerido por esta condición no es único y define un conjunto de valores. El valor mínimo de dicho conjunto, denotado por α_0 se conoce como abscisa de convergencia de $f(t)$ [1]. De acuerdo a la condición c), $f(t)$ puede ser una función que no tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito e incluso puede permanecer creciendo; pero su velocidad de crecimiento no es mayor que la de alguna función exponencial, de modo que existe una constante α tal que $|f(t)e^{-\alpha t}|$ deje de crecer al aumentar el tiempo. Entonces es posible seleccionar una constante $\alpha_1 > \alpha$ con la que la función $e^{-\alpha_1 t}$ disminuya más rápido que la velocidad con la que $f(t)$ crece y se asegure que la integral:

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-\alpha_1 t}| dt \quad (20)$$

converge [1], [2], [4]. Estas ideas son formalizadas a continuación.



Teorema 4. [1]

Si $f(t)$ es seccionalmente regular y de orden exponencial con abscisa de convergencia α_0 , entonces para cualquier s_0 con $\text{Res}_0 > \alpha_0$, la integral:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \tag{21}$$

converge uniformemente para todos los valores de s tales que $\text{Res} \geq \text{Res}_0$.

De acuerdo a esto, (14a), (14b) pueden escribirse como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{(Res)t} e^{i\omega t} ds \tag{22}$$

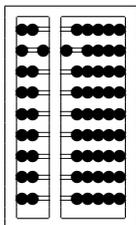
$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-at} e^{-i\omega t} dt \tag{23}$$

donde a debe cumplir $a \geq \text{Res}_0$. A partir de estas expresiones puede hacerse un razonamiento similar al hecho respecto a las ecuaciones (11a), (11b) para encontrar la siguiente interpretación de (22) y (23):

El par transformado de Laplace (14a), (14b) permite establecer que una función no periódica $f(t)$, que es cero para $t < 0$, puede calcularse como la suma de muchas funciones senoidales y cosenoidales de frecuencia ω diferente que varía de manera continua desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pasando por cero, y que todas ellas están igualmente “amortiguadas” por el factor exponencial e^{at} . Así, $F(s)$ representa la contribución a la función $f(t)$ de las funciones de frecuencia compleja $s = a + i\omega$. Además, el factor e^{at} puede tener cualquier valor de a tal que $a \geq \text{Res}_0$. Así, usando un valor diferente de a , puede cambiarse la tasa de “amortiguamiento” de todas las señales sinusoidales que forman a $f(t)$.

Es importante mencionar que aunque a se introdujo inicialmente como un valor positivo, si $f(t)$ es una función de orden exponencial y decreciente, entonces existen algunos valores negativos de a que satisfacen $a \geq \text{Res}_0$ por lo que (14a), (14b) siguen siendo convergentes. A esto se debe que el calificativo “amortiguadas” exponencialmente introducido en el párrafo anterior se haya puesto entre comillas.

En la figura 1 se presenta el plano complejo s . Nótese que, de acuerdo a (11a), $f(t)$ se puede calcular como una integral de línea sobre una recta vertical que coincide con el eje imaginario ($\text{Res} = 0$), mientras que, de acuerdo a (14a), $f(t)$ puede encontrarse como una integral de línea sobre una recta vertical paralela al eje imaginario ($\text{Res} = a$).



CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER Y DE LAPLACE

En esta parte se muestran algunos resultados numéricos para ilustrar la interpretación que se hizo de la transformada de Laplace al final de la sección anterior. Para esto, se asume que se da una función $f(t)$ que cumple con las propiedades para la existencia de (14a), (14b). Primero se calcula (14b) usando una versión discreta de la integral que la define. Una vez hecho este cálculo, se usa una versión discreta de (14a) para mostrar, numéricamente, que la función original $f(t)$ es igual a la suma de funciones sinusoidales de diferente frecuencia pero igualmente “amortiguadas”. Este mismo método también puede ser usado para calcular el par transformado de Fourier (11a), (11b). A continuación se detalla la manera en que pueden ser obtenidas las versiones discretas de (11a), (11b) y (14a), (14b).

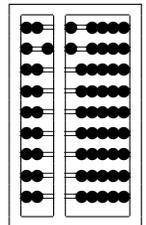
La transformada de Fourier, $F(\omega)$ dada en (11b), puede calcularse como el producto interno de las funciones $f(t)$ y $e^{-i\omega t}$ evaluado en el intervalo $t \in]-\infty, +\infty[[8]$. Mientras que la transformada de Laplace, $F(s)$ dada en (14b), puede calcularse como el producto interno de las funciones $f(t)$ $e^{-at}e^{-i\omega t}$ evaluado en el intervalo $t \in [0, +\infty[$, sabiendo que:

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t \tag{24}$$

$$e^{-at}e^{-i\omega t} = e^{-at}(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \tag{25}$$

Las versiones discretas de (11a), (11b), (14a) y (14b) pueden obtenerse eligiendo $dt = \Delta t$ muy pequeño. Esto se consigue tomando muestras de las funciones continuas involucradas usando una frecuencia de muestreo constante, f_s , suficientemente grande que satisfaga el teorema del muestreo [5], [6], [7]. Así, se debe cumplir $\Delta t = 1/f_s$. Aunque los productos internos involucrados se deben evaluar sobre un intervalo de tiempo infinitamente grande, para la solución numérica sólo se puede considerar un intervalo finito. Para minimizar al máximo el error que se introducirá con esta aproximación, el intervalo de tiempo se seleccionará de manera que se incluyan varios ciclos de la componente de menor frecuencia de $f(t)$, en el caso de la transformada de Fourier. El resultado obtenido es conocido en la literatura como la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT, *Short-Time Fourier Transform*) [8], [10]. Además, como esto equivale a considerar que $f(t)$ es cero fuera del intervalo considerado se dice que se ha hecho pasar esta función a través de una “ventana”. En el caso de la transformada de Laplace el intervalo de tiempo se seleccionará de manera que el producto $f(t)e^{-at}e^{-i\omega t}$ alcance un valor muy cercano a cero, lo cual puede determinarse a partir del valor de a seleccionado.

Por razones similares, los valores de frecuencia ω usados deben variar en un intervalo finito. Para disminuir al máximo el error introducido por



esta aproximación, las frecuencias que se usarán estarán en el intervalo $\omega \in [-(1/2)\omega_s, (1/2)\omega_s]$, donde $\omega_s = 2\pi f_s$. Esto debido a que, de acuerdo al teorema del muestreo, ω_s siempre se elige tal que [5], [6], [7]:

$$\omega_s > 2\omega_{\text{máx}}, \tag{26}$$

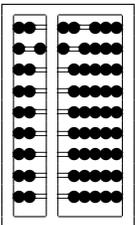
donde $\omega_{\text{máx}}$ es la frecuencia más grande contenida en $f(t)$. Por otro lado, la diferencia entre las frecuencias consecutivas consideradas, $\Delta\omega$, deberá ser pequeña comparada con el intervalo considerado $\omega \in [-(1/2)\omega_s, (1/2)\omega_s]$.

Dado que $F(\omega)$ puede obtenerse de $F(s)$ haciendo simplemente $a = 0$ en $s = a + i\omega$, en lo que sigue se hablará, en general, de la variable s tanto para la transformada de Laplace como para la transformada de Fourier.

$F(s)$ o $F(\omega)$ se calcularán punto a punto para valores específicos de $s = a + i\omega$. Para esto se calcularán numéricamente las integrales en (14b) y (11b), respectivamente. Primero se elige un valor constante de $s = a + i\omega$, y se hace variar t en todo el intervalo de tiempo seleccionado previamente la integral se obtiene numéricamente al sumar el valor del integrando para todos los valores de t empleados. Posteriormente, se hará $s = a + i\omega + i\Delta\omega$ y se repetirá el cálculo anterior para obtener $F(s)$ o $F(\omega)$ correspondiente al nuevo valor de $s = a + i\omega$. Así se deberá continuar hasta que ω tome todos los valores del intervalo de frecuencias anteriormente seleccionado. El resultado será un vector que en cada uno de sus elementos contendrá el valor numérico de $F(s)$ o $F(\omega)$ para un valor específico de $s = a + i\omega$. Estos valores numéricos podrán ser tabulados o graficados punto a punto (elemento a elemento).

Una vez calculado $F(s)$ o $F(\omega)$ se puede calcular $f(t)$ usando las versiones discretas de (14a) o (11a), respectivamente. Para esto, el integrando de estas ecuaciones se calcula punto a punto usando un valor constante de $s = a + i\omega$ y variando t en el mismo intervalo que se uso en el párrafo anterior. Como resultado se tendrá un vector de valores numéricos, cuyos elementos representan el valor del integrando, de la forma $F(s)e^{at}(\cos \omega t + i \text{sen } \omega t)$, para una frecuencia $s = a + i\omega$ específica y tiempos que abarcan todo el intervalo considerado. Nótese que $F(s)$ constituye la amplitud de dicha función sinusoidal amortiguada. Posteriormente, se hace $s = a + i\omega + i\Delta\omega$ y se repite el paso anterior. Así se deberá continuar hasta que ω tome todos los valores del intervalo de frecuencias usado para calcular $F(s)$ o $F(\omega)$. Una vez terminado este proceso, los vectores obtenidos en cada paso se suman elemento a elemento. El resultado será un vector que contiene el valor de $f(t)$ en cada instante de tiempo del intervalo considerado. Este resultado puede ser graficado para compararlo con la función $f(t)$ original (véanse la siguiente sección y el apéndice).

Esta manera de calcular las transformadas de Fourier y de Laplace no son usadas con frecuencia porque no constituyen métodos eficientes de cálculo



numérico. En efecto, el tiempo requerido para obtener los resultados que se presentan en la siguiente sección fue considerablemente mayor que cuando se usa un algoritmo eficiente como el de la transformada rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*) [11]. Sin embargo, el método presentado en este trabajo es muy útil desde el punto de vista de la interpretación de estas transformadas.

RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar el método recién descrito para calcular la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

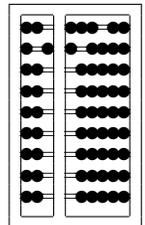
- 1) $f(t) = u(t);$
- 2) $f(t) = e^{-1.5t};$
- 3) $f(t) = \text{sen}(62.8t);$

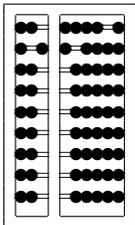
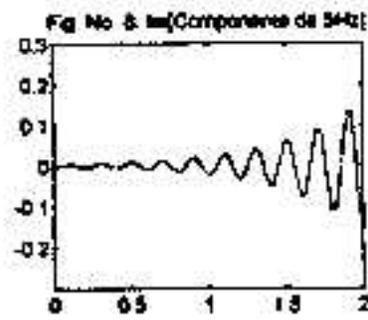
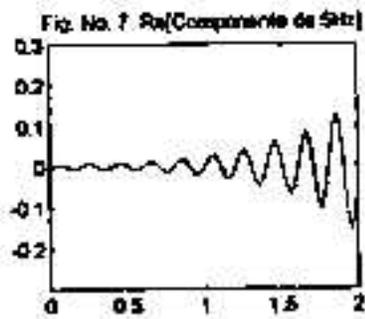
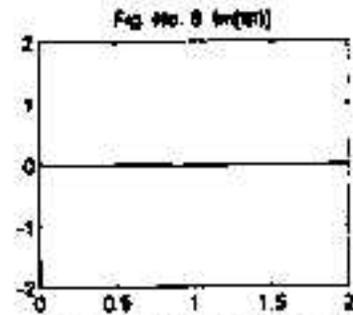
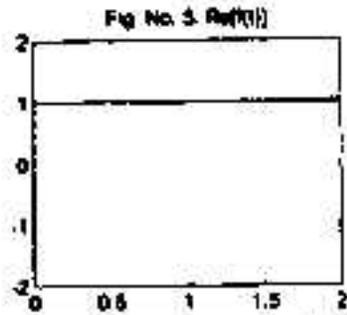
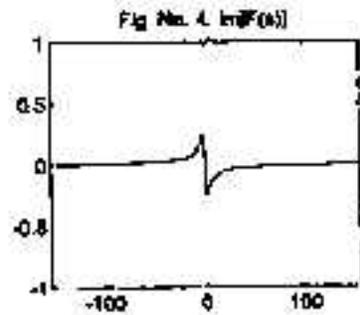
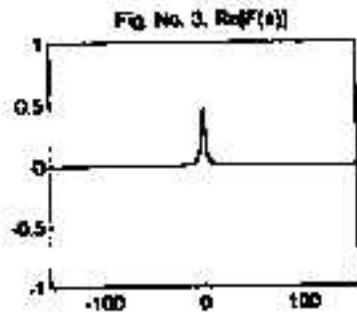
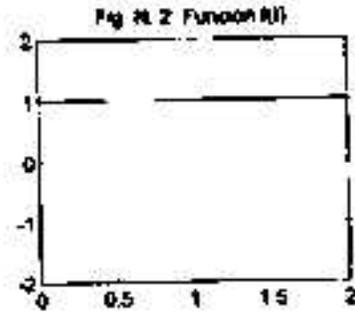
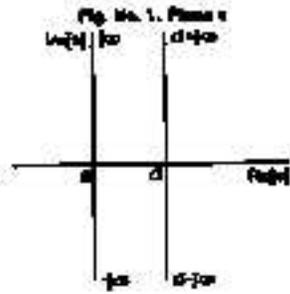
donde $u(t)$ representa la función escalón unitario aplicada en $t = 0$. Estos resultados fueron obtenidos usando el programa de MATLAB que se muestra en el apéndice.

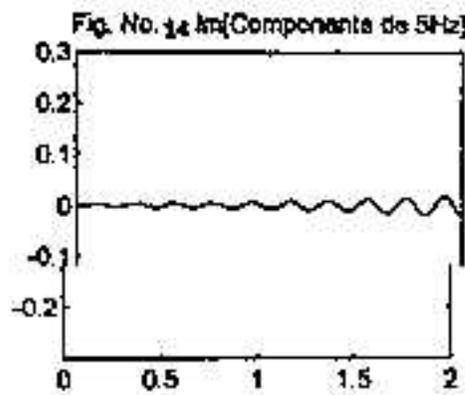
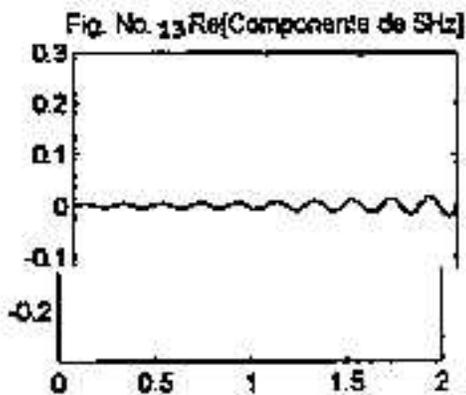
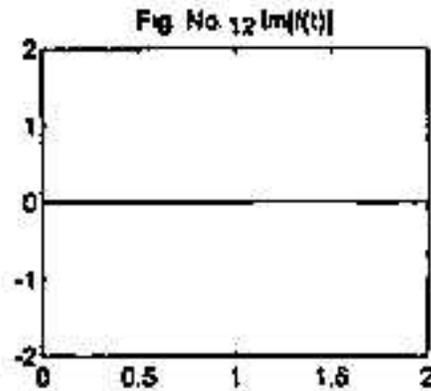
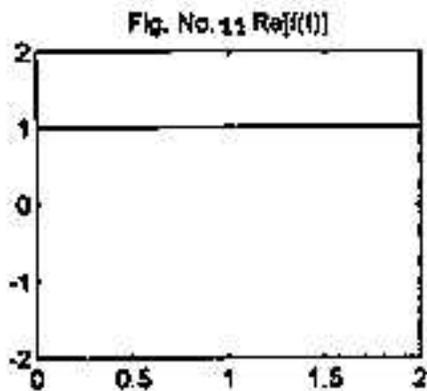
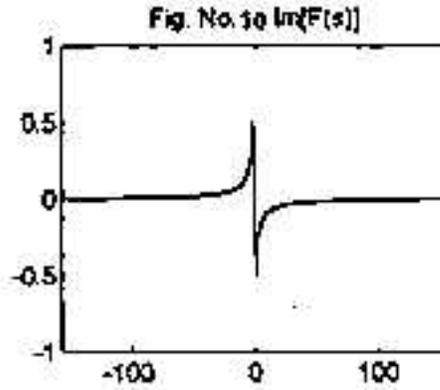
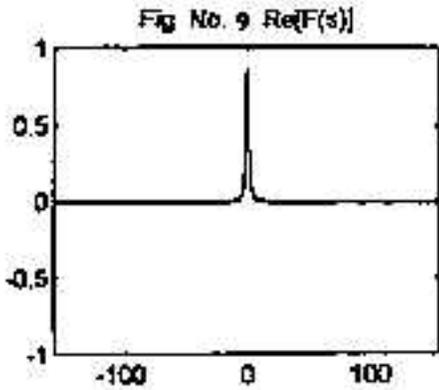
1) $f(t) = u(t)$.

En la figura 2 se presenta la gráfica de $f(t)$. Las figuras 3 y 4 muestran la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de $F(s)$, mientras que en las figuras 5 y 6 se presenta la parte real y la parte imaginaria de $f(t)$ obtenidas con el método descrito en párrafos anteriores. Nótese que la parte imaginaria de $f(t)$ siempre es cero. Finalmente, en las figuras 7 y 8 se presenta la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de la función $(1/2\pi i)F(s)e^{at}e^{i\omega t}\Delta\omega$ para una ω correspondiente a 5 Hz, que representa una de las sinusoides “amortiguadas” que componen a $f(t)$. Nótese que en realidad esta función es exponencialmente creciente debido a que todos estos resultados fueron obtenidos usando $a = 2$. También puede verse en las figuras 3 y 4 que la parte real de $F(s)$ es una función par de ω y su parte imaginaria es una función impar de ω , del mismo modo que para la transformada de Fourier de una función real, según se dijo anteriormente.

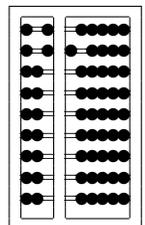
Las figuras 9, 10, 11, 12, 13 y 14 presentan los resultados correspondientes al caso en que $a = 1$. Nótese que a pesar de usar un valor diferente de a la función $f(t)$ obtenida es igual a la función original mostrada en la figura 2. Esto es debido a que, para una función escalón unitario, a puede tomar cualquier valor tal que $0 < a$ y la integral que define a $F(s)$ converge. En las figuras 13 y 14 puede verse que aunque las sinusoides que componen



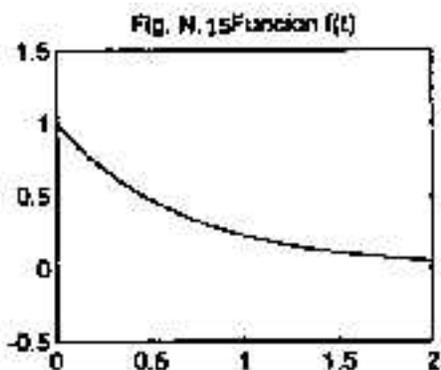




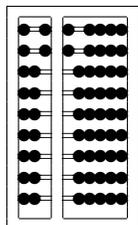
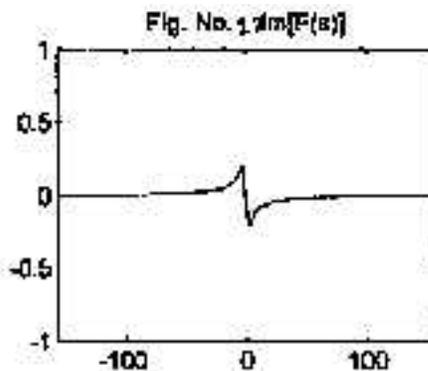
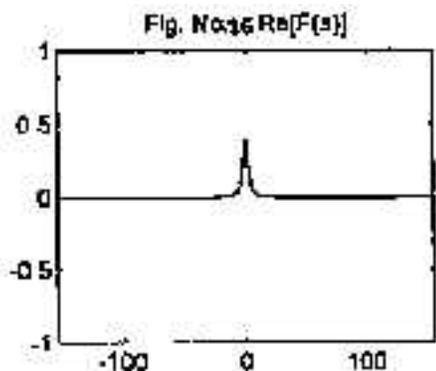
a $f(t)$ también crecen exponencialmente, lo hacen con diferente rapidez. Al comparar las figuras 3 y 4 con las figuras 9 y 10, puede apreciarse que $F(s)$ es diferente en ambos casos, lo cual es debido a que representan la contribución, a una misma función $f(t)$, de señales sinusoidales con diferente “amortiguamiento” exponencial.



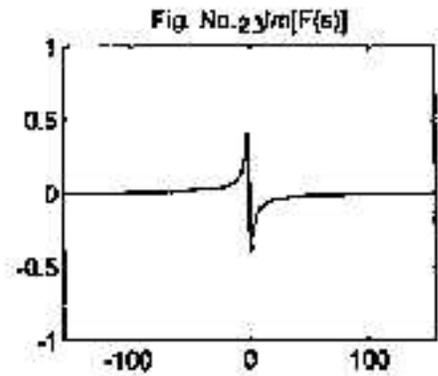
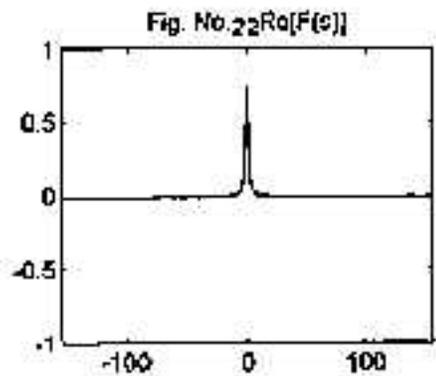
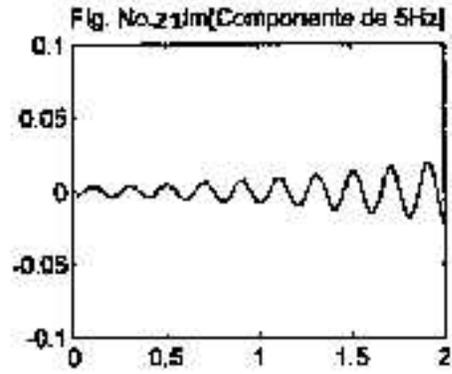
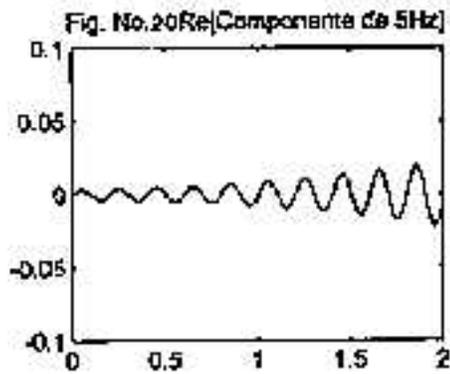
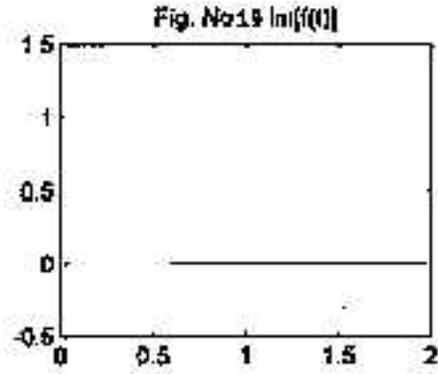
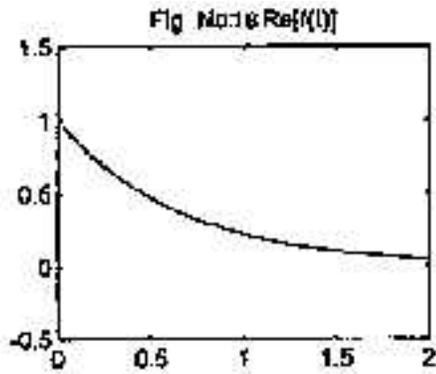
2) $f(t) = e^{-1.5t}$.



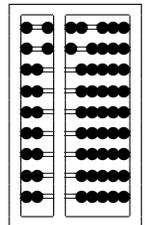
En la figura 15 se presenta la gráfica de $f(t)$. Las figuras 16 y 17 muestran la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de $F(s)$, mientras que en las figuras 18 y 19 se presenta la parte real y la parte imaginaria de $f(t)$ obtenidas con el método descrito en párrafos anteriores. Nótese que la parte imaginaria de $f(t)$ siempre es cero. Finalmente, en las figuras 20 y 21 se presenta la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de la función $(1/2\pi i)F(s)e^{at}e^{i\omega t}\Delta\omega$ para una ω correspondiente a 5 Hz, que representa una de las sinusoides “amortiguadas” que componen a $f(t)$. Nótese que en realidad estas funciones son exponencialmente crecientes debido a que todos estos resultados fueron obtenidos usando $a = 1$.

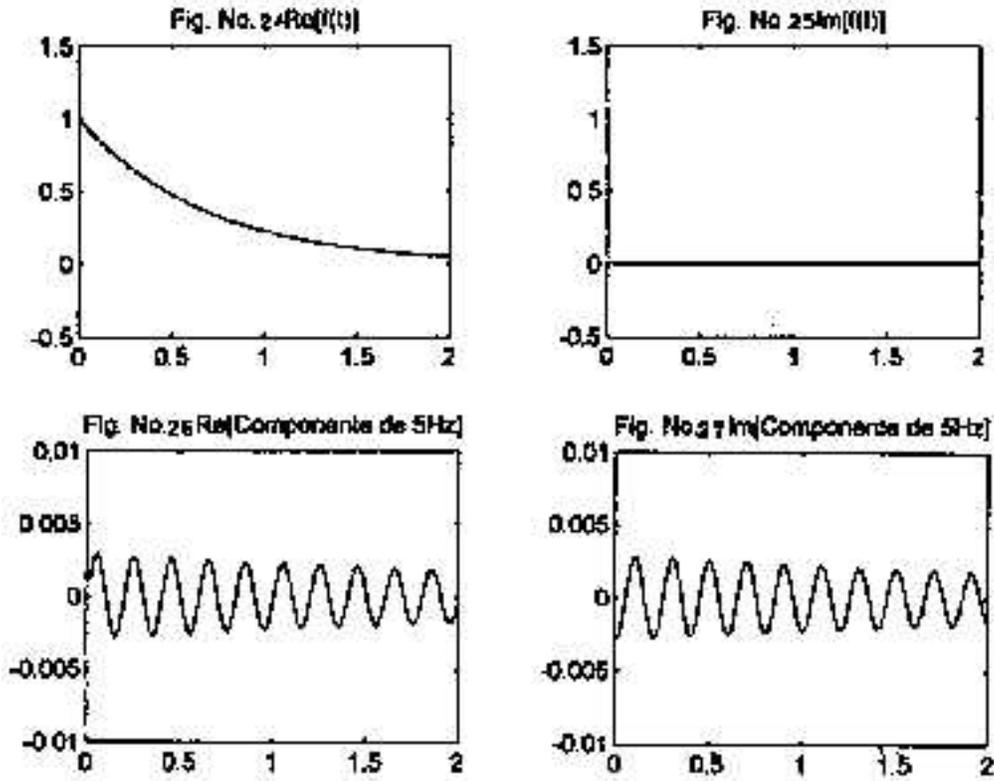


Las figuras 22, 23, 24, 25, 26 y 27, presentan los mismos resultados usando $a = -0.25$. Nótese que a pesar del valor negativo de a la función $f(t)$ obtenida es igual a la función original mostrada en la figura 15. Esto es debido a que al ser $f(t)$ una función de orden exponencial decreciente con tasa -1.5 , existen valores negativos de a tales que $-1.5 < a$ con los que la



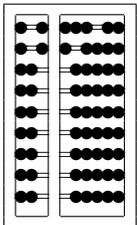
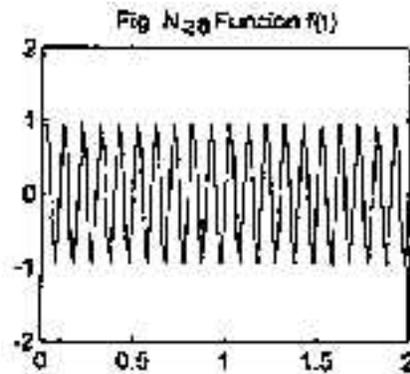
integral que define a $F(s)$ converge. En las figuras 26 y 27 puede verse que, en este caso, las sinusoides que componen a $f(t)$ decrecen exponencialmente. Al comparar las figuras 16 y 17 con las figuras 22 y 23, puede apreciarse que $F(s)$ es diferente en ambos casos, lo cual es debido a que representan la contribución, a una misma función $f(t)$, de señales sinusoidales con diferente “amortiguamiento” exponencial.

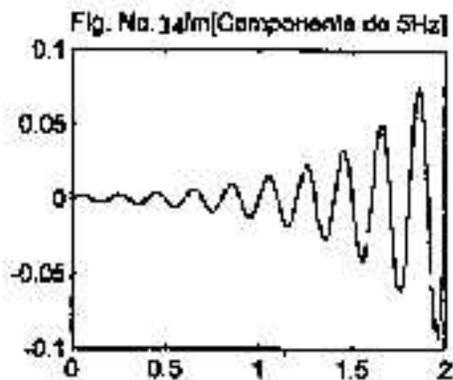
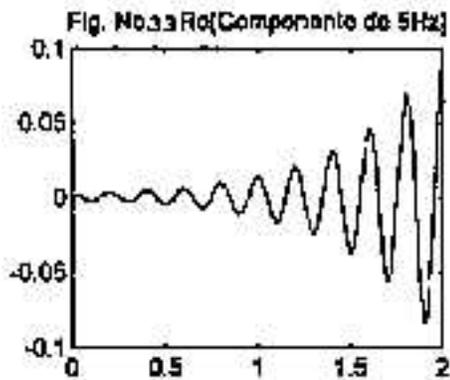
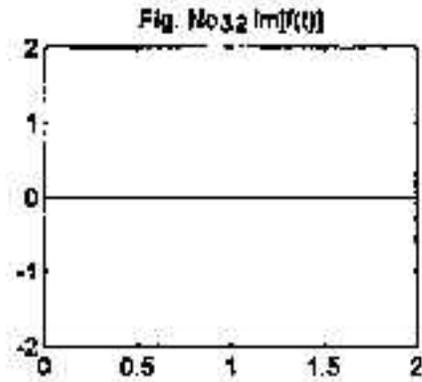
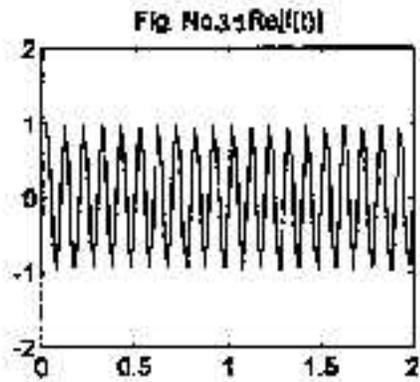
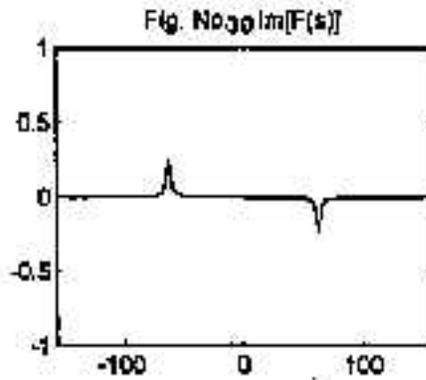
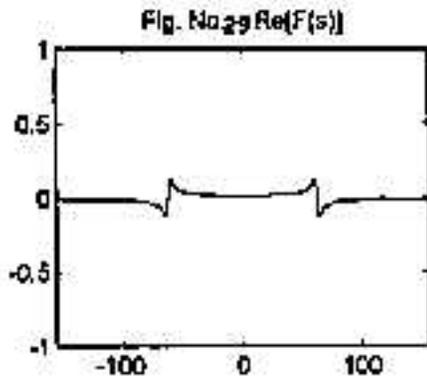




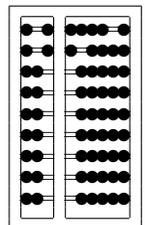
3) $f(t) = \text{sen}(62.8t)$.

Aunque la transformada de Laplace se introdujo argumentando que la función $f(t)$ era no periódica, esto no es restrictivo porque debido al factor de convergencia a las integrales (14a) y (14b) convergerán para dicha función periódica.

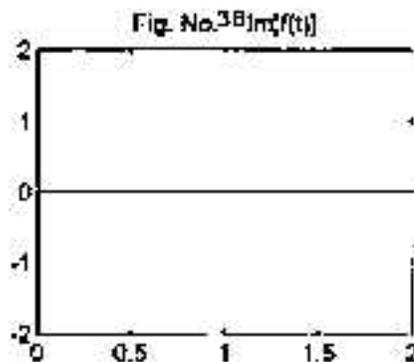
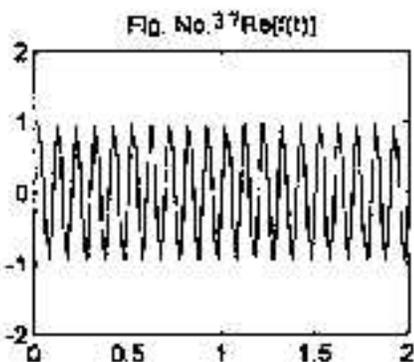
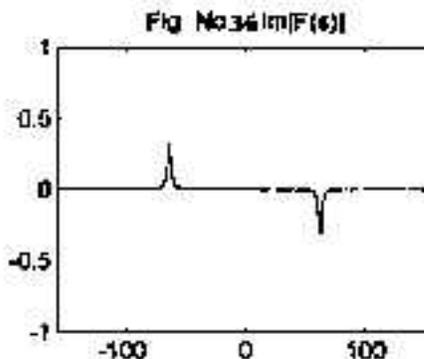
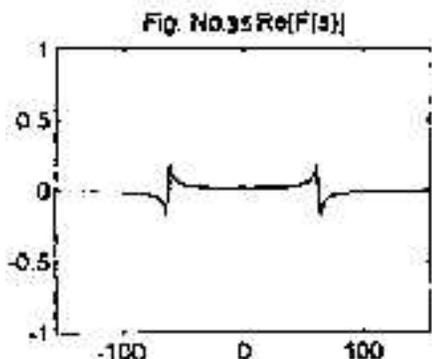




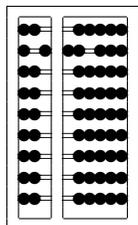
En la figura 28 se presenta la gráfica de $f(t)$. Las figuras 29 y 30 muestran la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de $F(s)$, mientras que en las figuras 31 y 32 se presenta la parte real y la parte imaginaria de $f(t)$ obtenidas con el método descrito en párrafos anteriores. Nótese que la parte imaginaria de $f(t)$ siempre es cero. Finalmente, en las figuras 33 y 34 se

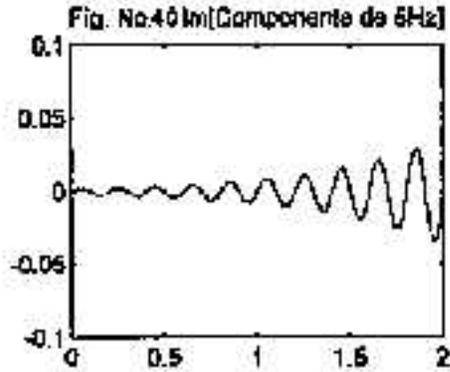
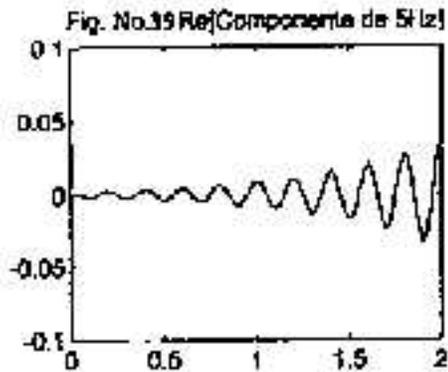


presenta la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de la función $(1/2\pi i)F(s)e^{at}e^{i\omega t}\Delta\omega$ para una ω correspondiente a 5 Hz, que representa una de las sinusoides “amortiguadas” que componen a $f(t)$. Nótese que en realidad estas funciones son exponencialmente crecientes debido a que todos estos resultados fueron obtenidos usando $a = 2$.



Las figuras 35, 36, 37, 38, 39 y 40, presentan los mismos resultados usando $a = 1.5$. Nótese que a pesar de usar un valor diferente de a la función $f(t)$ obtenida es igual a la función original mostrada en la figura 28. Esto es debido a que, para la función senoidal considerada, a puede tomar cualquier valor tal que $0 < a$ y la integral que define a $F(s)$ converge. En las figuras 39 y 40 puede verse que las sinusoides que componen a $f(t)$ también crecen exponencialmente, pero con diferente rapidez. Al comparar las figuras 29 y 30 con las figuras 35 y 36, puede apreciarse que $F(s)$ es diferente en ambos casos, lo cual es debido a que representan la contribución, a una misma función $f(t)$, de señales sinusoidales con diferente “amortiguamiento” exponencial. En realidad, en este caso dicha diferencia es muy pequeña y se debe a la pequeña diferencia existente entre los valores de $a = 2$ y $a = 1.5$ que se han usado.





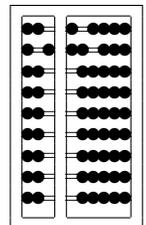
CONCLUSIONES

A partir de las definiciones matemáticas de las series de Fourier, la integral de Fourier y la transformada de Laplace, se ha hecho una interpretación del par de transformadas de Laplace, según la cual, una función no periódica esta formada por la suma de muchas funciones sinusoidales de diferente frecuencia y “amortiguadas” con la misma tasa exponencial. Para ilustrar esta interpretación se ha propuesto un método de cálculo numérico del par de transformadas de Laplace y se ha usado para el caso de tres funciones diferentes: un escalón unitario, una función exponencial y una función senoidal. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se encuentra que concuerdan con las ideas presentadas en este trabajo.

APÉNDICE

A continuación se lista un programa de MATLAB en el que se usan las ideas expuestas en este trabajo para calcular la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace de una función del tiempo específica. Este programa ha sido usado para obtener las gráficas de la última sección.

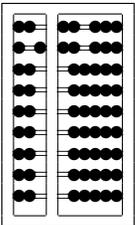
```
function forza=fuerza(F);
% Calculo de la Transformada de Laplace
% y de la Transformada Inversa de Laplace
% de una funcion seno del tiempo
fs=50; % Frecuencia de muestreo (Hz)
h=1/fs; % Periodo de muestreo (seg)
Nomuestras=100; % Numero de muestras en el tiempo
freqmax=fs/2; % Hz
sigm=1.5; % Abcisa de convergencia
k=1;
paso=0.1; % Incremento de la variable de Laplace
```



```

for fo=-freqmax:paso:freqmax,
    % fo es la Frecuencia de la variable de Laplace
    Laplar=0; % Parte real de la transformada de Laplace
    Laplai=0; % Parte imaginaria de la transformada de Laplace
    for i=1:Nomuestras+1,
        t=i*h; % Instante de muestreo
        pp(i)=t;
        xt=sin(2*pi*10*t); % funcion del tiempo a encontrar su transf. de Laplace
        Laplar=xt*exp(-sigm*t)*cos(2*pi*fo*t)*h+Laplar;
        Laplai=(-1)*xt*exp(-sigm*t)*sin(2*pi*fo*t)*h+Laplai;
        xx(i)=xt;
    end
    Laplacer(k)=Laplar;
    Laplacei(k)=Laplai;
    ww(k)=2*pi*fo; % Eje de frecuencias.
    k=k+1;
end
subplot(2,2,1);plot(pp,xx,'w')
axis([0 2 -2 2]);title('Fig. N. Funcion f(t)')
p=1;
sigma=1.5;
Lainversatr=0;
Lainversati=0;
for v=-freqmax:paso:freqmax,
    for m=1:Nomuestras+1,
        t=m*h;
        tt(m)=t; % Eje del tiempo
        laplainvr=Laplacer(p)*exp(sigma*t)*cos(2*pi*v*t)*paso;
        laplainvr=laplainvr-Laplacei(p)*exp(sigma*t)*sin(2*pi*v*t)*paso;
        laplainvi=Laplacei(p)*exp(sigma*t)*cos(2*pi*v*t)*paso;
        laplainvi=laplainvi+Laplacer(p)*exp(sigma*t)*sin(2*pi*v*t)*paso;
        Lainversar(m)=laplainvr;
        Lainversai(m)=laplainvi;
    end
    if v==5
        subplot(2,2,3);plot(tt,Lainversar,'w-')
        axis([0 2 -0.1 0.1]);title('Fig. No. Re[Componente de 5Hz]')
        end;
        if v==5
            subplot(2,2,4);plot(tt,Lainversai,'w-')
            axis([0 2 -0.1 0.1]);title('Fig. No. Im[Componente de 5Hz]')
            end;
        Lainversatr=Lainversatr+Lainversar;
        Lainversati=Lainversati+Lainversai;
        p=p+1;
    end
    % subplot(2,2,1);plot(ww,Laplacer,'w-')
    % axis([-157 157 -1 1]);title('Fig. No. Re[F(s)]')
    % subplot(2,2,2);plot(ww,Laplacei,'w-')
    % axis([-157 157 -1 1]);title('Fig. No. Im[F(s)]')
    % subplot(2,2,3);plot(tt,Lainversatr,'w-')
    % axis([0 2 -2 2]);title('Fig. No. Re[f(t)]')
    % subplot(2,2,4);plot(tt,Lainversati,'w-')
    % axis([0 2 -2 2]);title('Fig. No. Im[f(t)]')

```



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Wylie, C. R., *Matemáticas superiores para ingeniería*, 4a. edición, McGraw-Hill, 1994.
- [2] Kreyszig, E., *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, tomos I y II, 5a. edición, Limusa, 1991.
- [3] Hsu, H. P., *Análisis de Fourier*, Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [4] Holbrook, J. G., *Transformadas de Laplace para ingenieros en electrónica*, Limusa, 1984.
- [5] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [6] Kuo, B.C., *Digital Control Systems*, editado por Holt, Rinehart y Winston.
- [7] Astrom, K., *Computer-Controlled Systems. Theory and Design*, Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [8] Daubechies, I., “The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36. Núm. 5. pp. 961–997, septiembre de 1990.
- [9] Seo, B. y C. T. Chen, “The Relationship between the Laplace Transform and the Fourier Transform”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, Núm. 8. pp. 751, agosto de 1986.
- [10] Hlawatsch, F. y G. F. Boudreaux-Bartels, “Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations”, *IEEE SP Magazine*, pp. 21–57, abril de 1992.
- [11] Papoulis, A., *Sistemas digitales y analógicos, transformadas de Fourier, estimación espectral*, Marcombo Boixareu Editores, 1978.
- [12] Gómez, G. y H. Blancarte, “¿De qué trata la teoría de singularidades y catástrofes?”, primera parte, *Eureka*, Núm. 11, noviembre de 1997, UAQ.

