¿De qué trata la teoría de singularidades y castástrofes?

PRIMERA PARTE

Gonzalo Gómez Martínez
y
Herminio Blancarte Suárez

Facultad de Ingeniería de la UAQ

octubre de 1997

RESUMEN

En esta primera parte presentamos los preliminares necesarios para introducirnos en la teoría de Singularidades y Catástrofes, vista ésta desde un punto de vista elemental, haciendo énfasis en los resultados básicos de Cálculo y Análisis Metemático.

Las singularidades de las funciones de variable real

Si recurrimos a un diccionario la palabra *singularidad* significa: cualidad de singular o carácter o cosa que hace singular a alguien o a algo, o bien, particularidad. Pero en matemáticas, ¿qué significa una *singularidad*? Es en los primeros cursos de cálculo diferencial e integral donde aparece por primera vez el concepto de singularidad de una función dada. Este término se emplea para denominar a las *discontinuidades* de la función, es decir, el carácter singular o la particularidad de la función; dicho en lenguaje coloquial "lo no esperado o no deseado" o, parafraseando a un profesor, "las indecencias del comportamiento de la función".

Dichas singularidades se clasifican en dos tipos, a saber: las *removibles* o *evitables* y las *esenciales* (veáse por ejemplo Courant-John).

Pero para enteder lo anterior comencemos desde el principio.

Preliminares

Definición 1: *x_0 es un* punto límite *de $E \subseteq \mathbf{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$ la vecindad o entorno de radio x_0, que denotamos por $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ o $V_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbf{R}\colon x_0 - \varepsilon < y < x_0 + \varepsilon\}$, contiene al menos un punto y de E con $y \neq x_0$, tal que $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, es decir,*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap E - \{x_0\} \neq \emptyset. \tag{1}$$

Observemos que (1) quiere decir que la vecindad agujerada de x_0 siempre intersecta al conjunto E en al menos un punto y. Asimismo, dicho punto x_0 no necesariamente pertenece al conjunto E. Para comprender mejor esta definición veamos algunos ejemplos.

1) Si $E = (0, 1)$, el punto $x_0 = 1$ es un *punto límite* de E, ya que si tomamos una $\varepsilon > 0$, arbitrariamente pequeña, *i.e.*, $1 > \varepsilon > 0$ y si definimos $y \equiv 1 - \varepsilon/2$, es decir la media aritmética de los números: 1 y $1 - \varepsilon$, dicho número posee las siguientes propiedades

$$0 < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 \qquad \text{y} \qquad 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon,$$

y así,

$$(0, 1) \cap (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) - \{1\} \neq \emptyset,$$

La definición 1 dice que debemos mostrar (1), $\forall \varepsilon > 0$, ¿qué ocurre con las $\varepsilon > 1$?

Para finalizar este ejemplo afirmamos que también el 0 y, en realidad, cualquier punto interior x, tal que $0 < x < 1$, es también un punto límite de E, ¿podría el lector intentar mostrar dichas afirmanciones?

2) Si $E = (0, 1) \cup \{2\}$, el 2 no es un punto límite de E. A saber: si suponemos que lo es, para una $0 < \varepsilon < 1$ en particular, se tendría que

$$(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \cap E - \{2\} \neq \emptyset,$$

por lo tanto existe al menos un punto

$$y \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \cap E - \{2\} \subset E \qquad i.e. \quad y \in E \quad \text{e} \quad y \neq 2$$

que es equivalente a decir que $y \neq 2$ y $2 - \varepsilon < y < 2 + \varepsilon$, pero esto quiere decir que

$$1 = 2 - 1 < 2 - \varepsilon < y < 2 + \varepsilon < 2 + 1 = 3$$

o bien que

$$1 < y < 3,$$

es decir que $y \notin E$, lo cual es una contradicción, por lo tanto: el 2 no es un punto límite de E.

Las singularidades removilbles o evitables

Ahora consideremos una función f definida en su dominio de definición $D(f) \subseteq \mathbf{R}$, que toma valores en $\mathbf{R}$, es decir, $f\colon D(f) \to \mathbf{R}$. Un *punto límite* x_0 de $D(f)$ es una *discontinuidad* o *singularidad* de f, si definimos previamente $f(x_0) = L$ para algún real L y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \tag{2}$$

¿Cuáles son las llamadas *singularidades* o *discontinuidades removibles* o *evitables*?

Definición 2: x_0 *es una* singularidad removible *o* evitable *de* f, *si*

$$\text{Existe} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \text{tal que} \quad L \neq f(x_0). \tag{3}$$

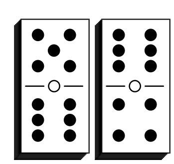
De hecho, se puede encontrar una caracterización que hace "operativa" dicha definición, a saber:

Teorema 1: x_0 *es una* singularidad removible *o* evitable *de* f *si y sólo si existe una función* F *y una* $\delta > 0$ *tal que* $F\colon V_\delta(x_0) \to \mathbf{R}$ *es* continua *en* $V_\delta(x_0)$ *y*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

Este resultado establece en el lenguaje coloquial que "si x_0 es una *singularidad removible* f, entonces el comportamiento local de la f en el punto x_0 es el mismo que el comportamiento local en torno del punto de una función F cuya regla de correspondencia no tiene problemas de evaluación en dicho punto x_0, es decir F es continua en el punto x_0". Este hecho es lo que justifica el nombre de *removible* o *evitable* (véase la figura para tener una idea geométrica).

Demostración.



La necesidad: como existe $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, para una $\varepsilon > 0$ dada, existe una $\delta'(\varepsilon, x_0) > 0$ (dependiente de x_0 y de ε). Consideremos dicha $\delta \equiv \delta'$ y definamos a F como en (4); resta probar que dicha función F es continua en x_0, es decir, que

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0) \equiv L, \tag{5}$$

pero si $x \in V_\delta(x_0) - \{x_0\}$, en dicho punto coinciden las funciones f y F y, por la definición de límite, tenemos que: $\varepsilon > |f(x) - L| = |F(x) - L| = 0$. Así hemos establecido (5).

La suficiencia: Tomemos una $\varepsilon > 0$ arbitraria. Lo que tenemos que mostrar es que existe una $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $x \in V_\delta(x_0) - \{x_0\}$, entonces $\varepsilon > |f(x) - L|$ y $L \neq f(x_0)$. Pero sabemos que la función F, definida en (4) es continua en x_0; en particular, para dicha $\varepsilon > 0$ tenemos que existe una $\delta'(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que si $x \in V_{\delta'}(x_0)$ (nótese que dicha vecindad ya no está agujerada, *i.e.* el propio punto x_0 puede ser incluido), entonces

$$|F(x) - L| < \varepsilon, \tag{6}$$

por lo tanto, si tomamos la δ buscada como $\delta = \delta'$, tendremos en particular que se establece (6) para aquellos puntos $x \in V_\delta(x_0) - \{x_0\}$; y evidentemente $L \neq f(x_0)$, ya que estamos suponiendo que f no es continua en x_0. ∎

Hablamos del carácter operativo del teorema anterior en el siguiente sentido.

Cuando se trata de calcular límites de funciones en algunos puntos donde la función no es continua, o en nuestro contexto, donde la función tiene una *singularidad removible* o *evitable*, lo que en realidad estamos encontrando es la función F definida en (4), y el cálculo de dicho límite se reduce a evaluar simplemente la función F en dicho punto, ilustraremos lo anterior con algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Calculemos si existe el $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4)/(x - 2)$. Como $(x^2 - 4)/(x - 2) = x + 2$ si $x \neq 2$, la función continua F en una vecindad de $x = 2$ propuesta la definiremos para una $\delta > 0$ como $F\colon V_\delta(2) \to \mathbf{R}$, esto es:

$$F(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2, \end{cases}$$

en virtud del teorema 1, podemos decir que el $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4)/(x - 2)$ existe y $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4)/(x - 2) = F(2) = 4$.

Ejemplo 2. Calculemos si existe el $\lim_{h\to 0}(\sqrt{a + h} - \sqrt{a})/h$. Otra vez, este problema depende de nuestra habilidad para encontrar una F continua en una vecindad de $h = 0$. Por álgebra elemental sabemos que:

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}, \quad \text{si} \quad h \neq 0;$$

considerando una $\delta > 0$ suficientemente pequeña definamos $F\colon V_\delta(0) \to \mathbf{R}$ como

$$F(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} & \text{si } h \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Como dicha F es continua en $h = 0$, por el teorema 1, podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \quad \text{existe}$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = F(0) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,.$$

Las singularidades esenciales

Las *singularidades esenciales* las definimos como las singularidades que *no son* removilbles o *no son* evitables, es decir,

Definición 3: x_0 *es una* singularidad esencial *de* f*, si:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \textit{no existe}, \tag{7}$$

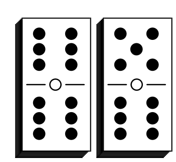
es decir, no es posible encontrar un número real L*, tal que* $f(x_0) = L$ *y* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$*.*

Se clasifican en: *singularidades finitas* y *singularidades infinitas*.

A continuación exhibimos un ejemplo de una *singularidad infinita.*

Ejemplo 3. Consideremos la función

$$f\colon (0,1) \to \mathbf{R},$$
$$f(x) = \frac{1}{x}\,;$$



esta función es *continua* en todo el intervalo $(0,1)$, y el *cero* es un punto límite de dicho intervalo; por lo anterior, podemos preguntarnos si el *cero* es una *singularidad removible* o *evitable* de la función f. Supongamos que lo es, es decir, que existe una $\delta > 0$ suficientemente pequeña y una función F, y tomemos un número real arbitrario L tal que:

$$F\colon V_\delta(0) \to \mathbf{R} \quad \text{continua},$$
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ L & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es decir, que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = L = F(0),$$

pero dicha definición debería cumplirse $\forall \varepsilon > 0$. En particular, si tomamos una $\varepsilon = |L|/2$, debe existir una $\delta(0, |L|/2) > 0$, de manera que si tomamos una x con $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, entonces

$$|F(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - L\right| < \frac{|L|}{2}\,,$$

pero como

$$|L| - \frac{1}{|x|} \leq \left|L - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x} - L\right| < \frac{|L|}{2}\,,$$

se establece que

$$\frac{L}{2} \leq \frac{|L|}{2} < \frac{1}{|x|}\,,$$

o que

$$L > \frac{2}{|x|} \neq 0, \qquad \forall L \in \mathbf{R} \tag{8}$$

(puesto que dicha L fue arbitraria). Lo que afirma (8) es que "existe un número real positivo llamado $(2/|x|)$ que es arbitrariamente pequeño". Pero evidentemente esta afirmación es una contradicción a la *propiedad arquimediana* de los números reales, la cual afirma justamente lo contrario, es decir, "en lo números *reales* no existen números que sean infinitamente pequeños, ni infinitamente grandes".

Dicha contradicción se debe a haber supuesto que el *cero* es una singularidad removible o evitable de la función $f(x) = (1/x)$. Por lo tanto, el *cero* es una singularidad esencial de tipo infinita para esta función.

Para finalizar, exhibamos una *singularidad esencial de tipo finito*.

Ejemplo 4. Consideremos la función $f\colon \mathbf{R}-\{0\} \to \mathbf{R}$ con $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Como *cero* es un punto límite del dominio de definición, supongamos que existe una función F y una $\delta > 0$ suficientemente pequeña definida por

$$F\colon V_\delta(0) \to \mathbf{R} \quad \text{continua}$$

tal que

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ L & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

pero si tal F es continua en $x = 0$, tendríamos que $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = L$, es decir, el punto L debería de ser único (la unicidad del límite) sin importar la forma de acercarnos al punto $x = 0$. Por lo tanto, nos acercaremos a $x = 0$ de dos formas distintas.

La primera es por medio de los puntos $x_n = 1/n\pi$ que tienden al punto $x = 0$ cuando la n crece, pero si evaluamos la función en dichos puntos obtenemos

$$F(x_n) = F\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \operatorname{sen} n\pi = 0.$$

así concluiremos que $L = 0$. Pero si ahora nos acercamos al 0 por puntos de la forma $x_n = 1/(n + 1/2)\pi$, nuestra F evaluada en dichos puntos es

$$F(x_n) = F\left(\frac{1}{(n+1/2)\pi}\right) = \operatorname{sen}\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi = \pm 1 = L.$$

Lo anterior es una clara contradición a la *unicidad* del límite L. Por consiguiente, el *cero* no puede ser una *singularidad removible* para dicha f, y así dicha función tiene una *singularidad esencial del tipo finito*.

Las singularidades de las funciones derivables de una variable real

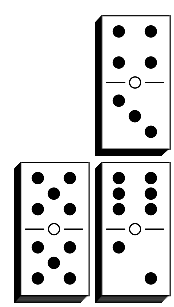
Preliminares

Sea f una función derivable definida en un intervalo abierto (a, b), que toma valores en $\mathbf{R}$. *La función derivada* f' la definimos como:

$$f'\colon (a, b) \to \mathbf{R} \quad \text{por} \quad x \to f'(x), \tag{9}$$

donde $f'(x) = \lim_{h\to 0}[f(x + h) - f(x)]/h$; es decir, la función que a cada punto x de (a, b) le asociamos su derivada en ese punto, $f'(x)$.

Observemos que dicha asociación nos define realmente una función, ya que la *derivada* en un punto x, $f'(x)$, está unívocamente determinada,



debido a que ésta se define a través de un límite que es único cuando existe. También es importante mencionar la necesidad de hablar de intervalos abiertos (a, b) para definir la noción de derivabilidad, puesto que en los puntos extremos a y b no tendrían sentido los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{para} \quad a < h$$

y

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}, \qquad \text{para} \quad h < b$$

a menos que pensaramos en los límites unilaterales, pero este no es el caso. A continuación estableceros algunos resultados útiles.

Definición 4: *M (m) es un* máximo (mínimo) local *de f en un punto x_0, si existe una $\delta > 0$ suficientemente pequeña tal que $f(x) \leq M$ $[f(x) \geq m]$ $\forall x \in V_\delta(x_0)$, respectivamente, de la función, es decir, con los valores máximos o mínimos de ésta. A dichos valores se les conoce como* valores extremos *de la función y su caracterización se establece en el siguiente teorema.*

Teorema 2: *Sea $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ derivable y M un* valor extremo *de f en $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que dicho *valor extremo* M es un *máximo local*, es decir, existe una $\delta > 0$ con $f(x) \leq M = f(x_0) \quad \forall x \in V_\delta(x_0)$. Ahora, en tal intervalo tomemos un punto x del lado izquierdo de x_0, *i.e.*, $x_0 - \delta < x < x_0$, y consideremos el cociente de Newton $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$. Por el teorema del valor medio, existe una ζ con $x < \zeta < x_0$ y tal que $f'(\zeta) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) \geq 0$. Por lo tanto, si tomamos el

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Análogamente procedamos para los puntos x a la derecha de x_0, *i.e.*, $x_0 < x < x_0 + \delta$ y una vez más, por el teorema del valor medio, existe una $\zeta \in (x_0, x_0 + \delta)$ tal que $f'(\zeta) = [f(x) - f(z)]/(x - z) \leq 0$. Así

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(x_0) = 0. \qquad \blacksquare$$

Es menester mencionar la caracterización de la función derivada f'. A saber: si la función derivada f' está definida en todo un intervalo, tiene una propiedad en común con las funciones continuas definidas en un intervalo, es decir, adoptan los valores intermedios, más precisamente.

Teorema 3: *Supongamos una función* $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ *derivable, tal que* $f'(x) > \lambda > f'(y)$ *para puntos* x, y *tales que* $a < x < y < b$ *y algúna* λ *real. Entonces existe* $\xi \in (x,y)$ *tal que* $f'(\xi) = \lambda$.

Demostración. Definamos una función $g\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ por $g(x) = f(x) - \lambda x$. Dicha g es derivable puesto que f y la multiplicación por la constante λ lo son. Entonces $g'(x) = f'(x) - \lambda > 0$; por lo tanto, existe un punto $t_1 \in [x,y]$ tal que $g(t_1) > g(x)$, ya que de lo contrario: si $g(t_1) \leq g(x)$ para todos los puntos $t_1 \in [x,y]$, entonces

$$0 \geq \frac{g(t_1) - g(x)}{t_1 - x}$$

y por la regla del sandwich para los límites tendríamos que

$$0 \geq \lim_{t_1 \to x} \frac{g(t_1) - g(x)}{t_1 - x} = g'(x)$$

i.e., $0 < g'(x) \leq 0$ ¡contradicción!

Similarmente como $g'(y) = f'(y) - \lambda < 0$, existe un punto $t_2 \in [x,y]$ tal que $g(t_2) > g(y)$, ya que de lo contrario: si $g(t_2) \leq g(y)$ para todos los puntos $t_2 \in [x,y]$, tendríamos que

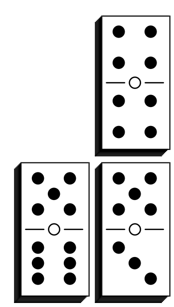
$$0 \leq \lim_{t_2 \to y} \frac{g(y) - g(t_2)}{y - t_2} = g'(y) < 0$$

i.e., $0 \leq g'(y) < 0$ ¡contradicción!

Ahora como g es derivable en $[x,y]$, en particular es *continua* en el intervalo cerrado y acotado $[x,y]$. Entonces, por uno de los teoremas principales de cálculo sabemos que existe un punto $\xi \in [x,y]$ tal que g alcanza su *máximo absoluto* en $[x,y]$, es decir, $g(\xi) \geq g(z) \quad \forall z \in [x,y]$. Pero por el resultado anterior dicha ξ debe estar en el *interior* de $[x,y]$ (observar que dicha ξ pudiera ser alguno de los extremos x o y), o sea, $\xi \in (x,y)$ y, por el teorema precedente:

$$g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \lambda,$$

i.e., $f'(\xi) = \lambda$. ∎



Introducción

Una vez más, es en los primeros cursos de cálculo es donde aparece dicha noción, con el concepto de *punto crítico* o *punto singular*, el cual se define como sigue. Sea $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ derivable, y $x_0 \in (a,b)$. Se dice que es un *punto crítico* o *singular* de f si $f'(x_0) = 0$.

Los *puntos regulares* de una función derivable son aquellos puntos que *no* son críticos o singulares. A los valores que adquiere la función se les llama respectivamente, *valores singulares* o *valores regulares*. Es de importancia fundamental para las aplicaciones del cálculo los puntos singulares o críticos de una función diferenciable, debido a que existe una íntima relación con los valores extremos (véase el teorema 2).

Desgraciadamente para las aplicaciones del cálculo, la existencia de puntos singulares de una función derivable no garantiza la existencia de valores extremos de la misma. El ejemplo clásico lo da la función $f(x) = x^3$, el *cero* es un punto singular de la f debido a que $f'(0) = 0$, sin embargo, $f(0) = 0$ es lo que se llama un *punto de inflexión* de la f (es el punto donde cambia de signo la función derivada f'), es decir, no es ni máximo ni mínimo. No obstante, los criterios de la primera y segunda derivadas nos proporcionan condiciones necesarias para que dichos puntos singulares sean los valores extremos o puntos de inflexión buscados. Para finalizar esta sección es menester mencionar que esta misma caracterización respecto a los criterios de la primera y segunda derivadas y los valores extremos de la función se pueden trasladar casi automáticamente a funciones de varias variables; que dicho sea de paso, es donde realmente existen las aplicaciones de esta teoría en las ciencias y la ingeniería. En la implementación numérica de dicha caracterización subyace toda una fascinante, compleja y apasionante teoría matemática conocida como la *Optimización no lineal.*

Las singularidades de las funciones continuamente derivables de una variable real

Preliminares

¿Cuáles son las funciones continuamente derivables? Respondamos la pregunta anterior con otra pregunta ¿la función definida en (9) es *continua*?, *i.e.*, ¿la función que a cada punto le asocia su derivada en dicho punto, es *continua*?, o bien, ¿la variación de las pendientes en cada punto de la gráfica de una función derivable es continua? La respuesta, aunque parezca sorprendente es *no*. Y el ejemplo más sencillo de una función que tiene ese tipo de "patología" es la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{10}$$

A saber: esta f es derivable en todos los puntos $x \neq 0$, debido a que es un producto y composición de funciones derivables en dichos puntos. En realidad sabemos que sus derivadas viene dadas por $f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ con $x \neq 0$. En realidad, el único punto cuestionable desde este punto de vista es $x = 0$, pero para salir de dudas, calculemos su derivada:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} (0+h)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{(0+h)}\right) - f(0)h &= \lim_{h\to 0} h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} h \\ &= \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0 \end{aligned}$$

¿por qué?, así establecemos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \tag{11}$$

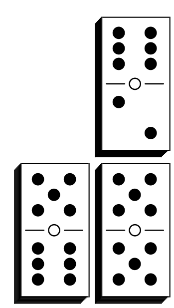
no obstante, esta función no es continua en $x = 0$. (Ejercicio.)

Debido a lo anterior, existen funciones para las cuales su función derivada no es necesariamente *continua*. Para generalizar esta situación procedamos de una manera recursiva. Primeramente establezcamos las funciones derivadas de orden superior de la siguiente manera: supongamos que la función $f^{(n-1)}\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ es derivable en (a,b), entonces la función derivada de orden n la definimos como

$$f^{(n)}\colon (a,b) \to \mathbf{R} \quad x \to f^{(n)}(x),$$

donde $f^{(n)}(x)$ se llama *derivada de orden* n en el punto x, definida por

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}\,.$$



Observemos que ahora $f^{(n-1)}$ es la función derivada de orden $(n-1)$ de f, a la cual le estamos exigiendo implícitamente no sólo que sea continua sino que sea derivable en (a,b). De acuerdo al párrafo anterior, $f^{(n)}$, ahora no tiene porque ser continua. Así pues, aquellas funciones f para las cuales las primeras n funciones: $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existen y son continuas, son realmente privilegiadas y merecen llevar un nombre distintivo; el nombre con el que se les ha distinguido es precisamente como *funciones continuamente derivables de orden n definidas en el intervalo* (a,b), o en la notación de conjuntos como:

$$C^n(a,b) = \{f\colon (a,b) \to \mathbf{R}\colon f', f'', \dots, f^{(n)} \quad \text{existen} \\ \text{y son continuas en } (a,b)\}$$

Se suele decir también a las funciones continuamente derivables de orden n *funciones lisas* o *suaves* (en inglés *smooth*), o *funciones de clase C^n* (léase: de clase C-n). Dichos nombres se deben al comportamiento geométricamente parejo o suave de su gráfica. Evidentemente (9) es un ejemplo de una función que no es continuamente derivable. Ejemplos naturales de funciones continuamente derivables lo constituyen precisamente los polinomios, las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales y las diversas composiciones, sumas y productos que se puedan obtener de éstas.

Se puede extender la definición de las funciones continuamente derivables de orden n definidas en el intervalo (a,b) al de las funciones continuamente derivables de orden ∞ definidas en el intervalo (a,b), o simplemente las funciones continuamente derivables definidas en el intervalo (a,b) como

$$C^\infty(a,b) = \{f\colon (a,b) \to \mathbf{R}\colon f^{(n)} \text{ existe y es continua en } (a,b) \quad \forall n \in \mathbf{N}\}.$$

Al conjunto de las funciones continuas definidas en (a,b), se denotarán por $C(a,b)$; al de las funciones únicamente derivables definidas en (a,b) por $D(a,b)$. Basta observar por ejemplo que la función valor absoluto,

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$f(x) = |x|,$$

es un ejemplo de una función no derivable en el punto $x = 0$; sin embargo, si es continua en todo $\mathbf{R}$. Así, tenemos que

$$D(a,b) \subset C(a,b).$$

Para finalizar dejamos como ejercicio para el lector probar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es tal que

$$f \in C^1(-\infty,+\infty) \quad \text{pero} \quad f \notin C^2(-\infty,+\infty).$$

Así establecemos la siguiente cadena infinita de contenciones propias

$$C^{\infty}(a,b) \subset \cdots \subset C^{n}(a,b) \cdots \subset C^{2}(a,b) \subset C^{1}(a,b) \subset D(a,b) \subset C(a,b).$$

Para finalizar esta parte recordemos la definiciones de *convergencia puntual y uniforme* de una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, donde $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$, y algunas de sus propiedades.

Comencemos dando la definición de una sucesión de funciones.

Definición 5: *Consideremos funciones* $f\colon \mathbf{N} \times (a,b) \to \mathbf{R}$*, donde a cada pareja* (n,x) *le asociamos un único número real* $f(n,x)$ *el cual definiremos como* $f(n,x) = f_n(x)$*. Simplificaremos dicha asociación poniendo* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$.

Observemos que dichas funciones también dependen de $x \in (a,b)$ implícitamente; asimismo, esta definición es una generalización natural de las sucesiones numéricas $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ya que en este caso hablamos de funciones que están definidas en $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, donde a cada $n \to x_n$, *i.e.*, la $x \in (a,b)$ permanece constante.

Convergencia puntual de una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$

Definición 6: *Una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$*, con* $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$ *converge puntualmente a una función* $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$*, que escribiremos como* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *o* $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.p.}} f(x)$*. Si para cada* $x \in (a,b)$ *y* $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$*, tal que* $\forall n \in \mathbf{N}$ *con* $n > N$*, entonces* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

En palabras, lo que dice la definición anterior es que: para cada $x \in (a,b)$, a partir de una cierta $N(\varepsilon, x)$, las funciones $f_n(x)$ caen dentro de la vecindad de radio ε con centro en el punto $f(x)$.

Ejemplos

a) $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f_n(x) = x^2/(1+nx^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.p.}} 0 = f(x)$, a saber: si $x = 0$ es trivial. Sea $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ y $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe una $N' \in \mathbf{N}$ tal que $1/N' < \varepsilon$ si $N \equiv N'$ y consideramos $n > N$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^2}{1+nx^2} - 0\right| &= \frac{x^2}{1+nx^2} \leq \frac{x^2}{nx^2} \\ &= \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Observemos que en este caso la N sólo dependió de la ε y no de la x y que $1+nx^2 > nx^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f_n(x) = 1/(1{+}nx^2) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.p.}} 0 = f(x)$, a saber: si $x = 0$ otra vez se cumple trivialmente. Si $x \neq 0$ por la propiedad arquimendiana existe un entero $N'(\varepsilon, x)$ tal que $1/x^2 < N'\varepsilon$ si consideramos $N \equiv N'$. Ahora, si consideramos naturales $n > N(\varepsilon, x)$, tenemos que

$$\left|\frac{1}{1+nx^2} - 0\right| = \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{nx^2} < \frac{1}{x^2 N} < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

La convergencia uniforme de una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$

Definición 7: *Una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *donde* $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ *converge uniformemente a una función* $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$*, que escribiremos* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *o* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.u.}} f$*. Si* $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$*, tal que* $\forall n \in \mathbf{N}$ *con* $n > N$ *y* $\forall x \in (a,b)$*, entonces* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

En palabras lo que dice la definición anterior es que dada la función f y considerando una pequeña banda de ancho $2\varepsilon > 0$ alrededor de $f(x)$, *i.e.*, el conjunto del plano dado por $\{(x, f(x) \pm \varepsilon)\colon x \in (a,b)\}$, a partir de una cierto momento (a partir de una $N(\varepsilon)$) todas las funciones $f_n(x)$ caen dentro de dicha banda.

Observemos que en este caso la N sólo depende de la ε y no de la variable x.

Ejemplos

a) $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f_n(x) = \operatorname{sen} nx/n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.u.}} 0 \equiv f(x)$. A saber, tomemos una $\varepsilon > 0$; por la propiedad arquimendiana existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que $\varepsilon > 1/N$ y consideremos dicha N, y $n \in \mathbf{N}$, tales que $n > N$. Ahora tomemos cualesquiera $x \in \mathbf{R}$ entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n} - 0\right| \leq \frac{|\operatorname{sen} nx|}{n} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

b) La sucesión dada en el ejemplo anterior $f_n\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dada por $f_n(x) = 1/(1{+}nx^2)$ no converge uniformemente a $0 = f(x)$. Si lo hiciera, la definición en particular debería cumplirse para una $\varepsilon = 1/3$ para la cual existe una $N(1/3) \in \mathbf{N}$ tal que si $n \in \mathbf{N}$ con $n > N$, y también considerando en particular para una $x = 1/\sqrt{n}$, tendríamos que

$$\left|\frac{1}{1+nx^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+n(1/\sqrt{n})^2}\right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

¡contradicción! ■

Por lo tanto "la convergencia puntual de funciones no implica la convergencia uniforme"; sin embargo, el inverso de este resultado es verdad. Lo dejamos como ejercicio para el lector.

La convergencia uniforme de una serie de funciones

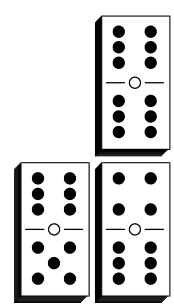
Definición 8: *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, se dice que es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n, m$ en $\mathbf{N}$ con $n, m > N$ y $\forall x \in (a,b)$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.*

Ejercicio. Pruebe que toda sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ que converge uniformemente a una f es de Cauchy.

Definición 9: *Consideremos una sucesion de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, y definamos la sucesión de funciones de las sumas parciales $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ para cada $x \in (a,b)$. Se dice que la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$* converge uniformemente a una función suma *S que definiremos como $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$, o bien, $\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = S$. Si la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente a la función S.*

El problema con la definición anterior —como en general con las definiciones de convergencia— es que *a priori* debemos de tener un candidato para después aplicarle la definición correspondiente, y como no existe un método para obtener dicho canditato, resulta un problema realmente complicado; es por eso que el siguiente criterio debido a A. Cauchy resulta realmente útil.

Teorema 4: *Sea una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ con $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ y sea $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ la sucesión de las sumas parciales de $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Si la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy, entonces existe una función $S\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = S$.*



Demostración. Como la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy, en particular para cada $x \in (a,b)$, $\{S_n(x)\}_{n\in N}$ es una sucesión de números reales que es de Cauchy y, como $\mathbf{R}$ es completo, *i.e.*, "todas las sucesiones de Cauchy de números reales convergen", existe un único $S(x) \in \mathbf{R}$. Por lo tanto, definamos nuestra función $S\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ como la función que a cada punto

$x \in (a,b)$ le asociamos el único número real $\lim_{n\to\infty} S_n(x) \equiv S(x)$; evidentemente está bien definida por la propia construcción. Lo que nos resta probar es que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Para ello consideremos una $\varepsilon/2 > 0$. Como $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ es de Cauchy, existe una $N_1(\varepsilon/2) \in \mathbf{N}$ tal que si $n > m > N_1$ y $x \in (a,b)$, entonces

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{$*$}$$

fijemos una m y hagamos variar la n; otra vez, para $\varepsilon/2 > 0$ existe una $N_2(\varepsilon/2) \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N_2(\varepsilon/2)$ y $x \in (a,b)$, tenemos

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{$**$}$$

Si definimos $N \equiv \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y consideramos $m \in \mathbf{N}$, tales que $m > N$, y además cualesquiera $x \in (a,b)$, (*) y (**) se establecen simultáneamente. Entonces

$$|S_m(x) - S(x)| \leq |S_m(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

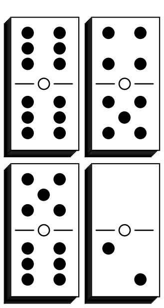
Ejemplo. Analicemos la convergencia uniforme de la siguiente serie con este criterio:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$$

para $x \geq 1$. En este caso, las sumas parciales S_n vienen dadas por $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1/1+k^2x^2)$. Ahora tomemos una $\varepsilon > 0$ y hagamos la diferencia entre las sumas S_n y S_m para obtener las siguientes estimaciones, suponiendo que $n > m$. Observando que

$$1 + k^2x^2 > k^2x^2 \geq 0 \to \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{k^2x^2} \leq \frac{1}{k^2},$$

puesto que $x \geq 1$, tenemos



$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_m(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+k^2x^2} \right| \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{1+k^2x^2} < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2x^2} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para $n > m > N(\varepsilon)$ para cierta $N(\varepsilon)$ que existe debido a que $\sum_{k=m+1}^{n}(1/k^2)$ es la diferencia de dos sumas parciales de una serie armónica convergente. $\blacksquare$

Para finalizar recordemos un resultado útil que da condiciones necesarias para que la *convergencia puntual* se convierta en *convergencia uniforme*.

Teorema 5: *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *una sucesión de funciones donde* $f_n\colon (a,b) \to \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$ *y supongamos que existe una* $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ *tal que* $f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{c.p.}}} f$ *y definamos* $M_n \equiv \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in (a,b)\}$ *(donde* sup *significa la mínima cota superior del conjunto de números reales* $\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in (a,b)\}$ *siempre que éste sea un número real), entonces* $f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{c.u.}}} f$ *si y sólo si la sucesión de números reales* $\{M_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *es tal que* $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demostración.

La necesidad. Para cada n, M_n es la mínima cota superior de $\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in (a,b)\}$; en particular es una cota superior de dicho conjunto y por lo tanto $M_n \geq |f_n(x) - f(x)|$. Por otro lado estamos suponiendo que $f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{c.u.}}} f$, *i.e.*, que dada una $\varepsilon > 0$ existe una $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N$ y si $x \in (a,b)$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, *i.e.*, que para $n > N$, dicha ε es una cota superior de $|f_n(x) - f(x)|$; por lo tanto, si consideramos tales $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > N$ entonces $0 \leq M_n < \varepsilon$. Así, hemos probado que $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

La suficiencia. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que si $n > N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n = |M_n - 0| < \varepsilon$. ■

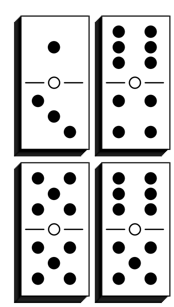
Se dará un aplicación muy importante de este resultado en la siguiente sección.

Introducción

Comencemos recordando el Teorema de Taylor.

Teorema 6: *Supongamos una función* $f \in C^n(a,b)$ *y consideremos dos puntos tales que* $a < x < y < b$, *entonces existe* ξ *tal que* $x < \xi < y$ *cumple que*

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(x)}{2!}(y-x)^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(y-x)^{n-1} + R_n, \tag{12}$$



donde

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(y-x)^n \quad \text{y} \quad \lim_{y\to x} \frac{R_n}{(y-x)^{n-1}} = 0. \tag{13}$$

En palabras lo que afirma el teorema de Taylor es que una función $f \in C^n(a,b)$ puede ser aproximada por un polinomio en $(y-x)$ de grado $n-1$ (llamado también el polinomio de Taylor) y cuyo residuo R_n tiende a cero más rápidamente que la potencia anterior que la precede, *i.e.*, $(y-x)^{n-1}$ cuando la $y \to x$.

Parece natural preguntarnos: ¿qué tipo de convergencia (puntual o uniforme) tiene el polinomio de Taylor para la función f? La respuesta es que el polinomio de Taylor de la función f converge uniformemente a la función f en una vecindad del punto x. A saber, consideremos (12) de la forma

$$\left| f(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k \right| = |R_n| = \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}(y-x)^n;$$

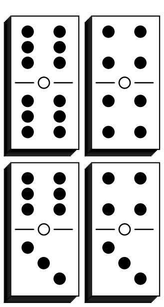
si pensamos el polinomio de Taylor como la suma parcial de la serie de Taylor (la cual definiremos en la próxima sección), en virtud del teorema 5 bastaría probar que $|R_n| \to 0$. Para probar lo anterior primero observemos que $|R_n|$ es una función de las variables x, y, ξ y n. Si fijamos la x y consideramos una vecindad cerrada de radio $1 > \delta > 0$ con centro $xi.e[x-\delta, x+\delta]$ y tomando cualesquiera $y \in [x-\delta, x+\delta]$ por la continuidad de la función $f^{(n)}$ restringida a $[x-\delta, x+\delta]$ existe una $M = \max_y \in [x-\delta, x+\delta] f(y)$, en particular $|f^{(n)}(\xi)| \leq M$. Ahora $(y-x)^n \leq \delta^n$ y como $n! \geq 1$, obtenemos una estimación para $|R_n|$ de la siguiente forma

$$|R_n| \leq M\delta^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{asĆ}, |R_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \blacksquare$$

Debido a lo anterior cuando usemos el polinomio de Taylor de una función f como una aproximación de la misma, en adelante redimimos todas las manipulaciones que hagamos a dicha serie, debido al resultado anterior.

Una función patológica continuamente derivable

Empecemos con una definición.



Definición 10: *Una función $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ se llama* analítica *si f tiene un desarrollo en series de Taylor para cada punto $x \in (a,b)$,* i.e.,

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y-x)^n \text{ con } y \in V_\delta(x). \tag{14}$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x)(y-x)^n/n!$ es la serie de Taylor de f para cada $y \in V_\delta(x)$.

Al conjunto de todas las funciones analíticas se le denota usualmente como $C^\omega(a,b)$, *i.e.*,

$$C^\omega(a,b) = \{f\colon (a,b) \to \mathbf{R}\colon f \text{ es analítica}\}. \tag{15}$$

Los polinomios, las funciones trigonométricas, la exponencial y el logaritmo son ejemplos de funciones analíticas. En realidad podemos enunciar en este contexto el siguiente resultado: la serie de Taylor de la función f converge uniformemente a la función f en una vecindad del punto x. La prueba de dicho resultado es una consecuencia inmediata del resultado de la sección precedente y la dejamos como un ejercicio para el lector. De hecho

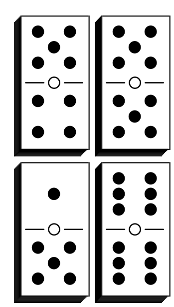
$$C^\omega(a,b) \subset C^\infty(a,b).$$

Pero, aunque parezca sorprendente, no toda función $f \in C^\infty(a,b)$ es $f \in C^\omega(a,b)$, *i.e.*, existe una función $f \in C^\infty(a,b)$ tal que $f \notin C^\omega(a,b)$. La función es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{16}$$

A continuación mostraremos que dicha $f \in C^\infty(-\infty,+\infty)$. Primero observemos que para $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2}P(1/x)$, donde $P(1/x)$ es un polinomio de grado $3n$ en la variable $1/x$, cuando $x \neq 0$ y la continuidad de $f^{(n)}(x)$. En este caso se sigue de la continuidad de ambas funciones: e^{-1/x^2} y $P(1/x)$, respectivamente. Lo que resta es demostrar la continuidad de la función $f^{(n)}(x)$ en $x = 0$. Para ello, primeramente vamos a tratar de investigar cómo se comporta f' en $x = 0$; un cálculo rápido nos da que $f'(x) = -(2/x^3)e^{-1/x^2} = 2\xi^{3/2}e^{-\xi}$ para $1/x^2 = \xi$, cuando $x \neq 0$, y $f'(0)$ viene dada por

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h}.$$



Para calcular este límite vamos a recurrrir a un resultado que no podemos probar en este artículo pero que el lector interesado puede consultar en el libro de *Introducción al cálculo y al análisis matemático* de R. Courant y F. John, pág. 271 (véase la bibliografía), que nos dice lo siguiente.

Teorema: *Si $a > 1$ y $\alpha > 0$, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \quad \text{o bien que} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0. \tag{17}$$

En palabras, lo que afirma el teorema anterior es que la función exponencial se torna infinita, de orden de magnitud superior a cualquier potencia de x.

En este caso, para el cambio de variable anterior $1/x^2 = \xi$ y $a = e$, $\alpha = 3/2$, utilizando el teorema obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{\xi\to\infty} = 2 \lim_{y\to\infty} \frac{\xi^{3/2}}{e^{\xi}} = 0.$$

Por lo tanto podemos definir de manera continua a

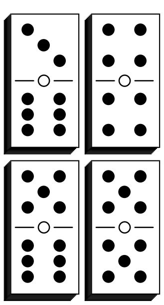
$$f'(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ahora por inducción matemática sobre n podemos concluir que podemos definir continamente a $f^{(n)}(x)$ como

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{18}$$

Así, podemos concluir que como $f^{(n)}(x)$ es continua $\forall n \in \mathbf{N}$, entonces la función original $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Pero dicha $f \notin C^\omega(\mathbf{R})$ ya que si $f \in C^\omega(\mathbf{R})$ entonces, en particular en $x = 0$, tendríamos que existe una $\delta > 0$ tal que para $h \in (-\delta, \delta) - \{0\}$, y por (18) que

$$f(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} h^n \equiv 0, \tag{19}$$



pero por otro lado, por (16),

$$f(h) = e^{-1/h^2} \tag{20}$$

¡es una contradicción! Por lo tanto

$$f \notin C^\omega(\mathbf{R}) \qquad \blacksquare$$

Referencias

[1] *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 1, Courant R. y F. John, 1965, John Wiley & Sons Inc. Versión en español: *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. 1, Courant R. y F. John, Limusa S. A., primera edición, 1971.

[2] *Calculus*, second edition. Spivack M. W. A.Benjamin Inc., New York. Versión en español: *Calculus. Cálculo infinitesimal*, segunda edición, Spivack M, Editorial Reverté, S. A., 1992.

[3] *Principles of Mathematical Analysis*, Rudin W, Mc Graw Hill Book Co., EUA, 1976. Versión en español: *Principios de análisis matemático*, tercera edición, Rudin W, Mc Graw-Hill, 1980.