Una topología de los números naturales*

Gabriel Ruiz Hernández
Instituto de Matemáticas, UNAM

1 de septimebre de 1997

RESUMEN

En este trabajo vamos a describir un espacio topológico X con las siguientes propiedades: numerable, Hausdorff, conexo y no localmente conexo.

Introducción

La Topología es una de las ramas más modernas de las matemáticas y su relación con otras áreas de esta ciencia es fundamental. El estudio de la topología se centra en las propiedades cualitativas y no en las cuantitativas de los objetos matemáticos, su extenso desarrollo a dado lugar a distintas áreas, como son la topología: algebraica, diferencial, de conjuntos, geométrica. El presente trabajo pertenece a la topología de conjuntos. En la bibliografía el lector podrá encontrar fuentes de cada uno de estos temas.

La topología de un conjunto

A cualquier conjunto se le puede dar una estructura de espacio topológico. Para ello basta distinguir una familia τ de subconjuntos de X, a cuyos elementos se les da el nombre de subconjuntos abiertos de X. Dicha familia debe satisfacer las tres propiedades siguientes:

a) el espacio total X y el conjunto vacío $\emptyset$ están en τ;
b) la unión arbitraria de elementos en τ es también un elemento de τ;
c) la intersección finita de elementos en τ es también un elemento de τ.

---

* *Taller de ejemplos y contraejemplos en topología*, XXVIII Congreso de la Sociedad Mexicana de Matemáticas efectuado en Colima, Col., octubre de 1995.

A la pareja (X, τ) se le llama un espacio topológico.

La topología usual de los reales

Como un ejemplo de espacio topológico consideremos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Para dotar a este conjunto de una topología, considere la familia $\tau = \{U \subset \mathbb{R} |$ si $x \in U$ existen $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $x \in (a, b) \subset U\}$. Es sencillo probar que $(\mathbb{R}, \tau)$ es un espacio topológico. A esta topología de $\mathbb{R}$ se le conoce como topología usual de $\mathbb{R}$. Esto se debe a que se le pueden dar muchas otras topologías, pero ésta en particular es la más importante de ellas.

Ejemplos y contraejemplos

En la investigación de las propiedades de los espacios topológicos resulta importante la construcción de espacios que cumplan ciertas propiedades interesantes. Pensemos en la pregunta:

¿Existe un espacio topológico X tal que de todas las funciones biyectivas $f\colon X \to X$, sólo la identidad es continua?

Si existiera un espacio topológico con esta propiedad, sería un ejemplo patológico con respecto a lo que nuestra intuición espera.

Si no existiera un espacio con esa propiedad, entonces tendríamos un teorema que pudiera garantizar la existencia de funciones biyectivas, continuas y distinta de la identidad en cualquier espacio topológico.

En los contraejemplos pasa lo contrario: uno puede sospechar que cierta proposición es verdadera, mas de repente llega una persona y nos muestra un espacio que satisface la hipótesis, pero no la conclusión de nuestra afirmación; es decir, nos muestra un contraejemplo de nuestro razonamiento. Sin duda, en ese momento buscaremos otra dirección en nuestro trabajo.

De este modo, podemos observar una especie de dualidad en los ejemplos y contraejemplos, los cuales tienen como finalidad principal ser una brújula en el quehacer matemático.

Propiedades de los espacios topologicos

Debido a la gran generalidad de la definición de un espacio topológico, es necesario añadir más propiedades para aspirar a desentrañar su estructura.

Hemos visto que un espacio topológico es una pareja (X, τ) donde τ es una familia de subconjuntos de X los cuales reciben el nombre de *subconjuntos abiertos* de X.

Definición 1: *Un subconjunto $A \subset X$ de X se dice que es un conjunto cerrado de X si su complemento es abierto, es decir si $X - A \in \tau$.*

Definición 2: *Sea A un subconjunto de X, definimos la cerradura de A, denotada $\bar{A}$, como el conjunto cerrado de X más pequeño que contiene a A.*

Definición 3: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto β de τ se dice que es una base para la topología τ del espacio X, si satisface las dos condiciones siguientes:* i*) para todo $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$;* ii*) dados $U, V \in \tau$ y $x \in U \cap V$, existe $W \in \tau$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.*

Definición 4: *Un espacio topológico es de Hausdorff si para todo par de puntos distintos x, y existen conjuntos abiertos U, V, que contienen a x y a y, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 5: *Un espacio X es conexo si X no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de X.*

Definición 6: *Un espacio topológico X es localmente conexo si dado cualquier abierto U de X y un elemento $x \in U$, existe un abierto V tal que $x \in V \subset U$ y V no se puede escribir como la unión de dos abiertos de X.*

Por ejemplo, los reales con la topología usual es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo.

Nuestro espacio

Vamos a considerar el conjunto de los números naturales y lo vamos a dotar de una topología y así obtener un espacio topológico al cual denotaremos por X.

La topología que le vamos a dar a los naturales será la inducida por la siguiente familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

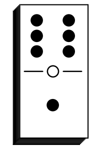
Dados $a, b \in \mathbb{N}$, con $(a, b) = 1$, definamos $U_b(a) = \{a + bk \in \mathbb{N}/k \in \mathbb{Z}\}$. Sea

$$\beta = \{U_b(a)/a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos a probar que β es una base para alguna topología de $\mathbb{N}$.

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $(a, b) = 1$. Entonces $a \in U_b(a)$; es decir, dado cualquier punto de $\mathbb{N}$, existe un elemento de β que lo contiene.

Para concluir que β es una base, usaremos el siguiente lema:



Lema 1: *Si $U_x(y), U_b(a) \in \beta$, entonces $U_x(y) \cap U_b(a) \neq \emptyset$ si y sólo si $(x, b) | y - a$.*

Demostración. Observemos que $z \in U_x(y) \cap U_b(a)$ si y sólo si $z = y + k_1 x = a + k_2 b$ para algunos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, pero esto es equivalente a que la ecuación $y - a = k_2 b - k_1 x$ tenga solución $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Pero esta solución existe si y sólo si $(x, b) | y - a$. Si la última ecuación tiene solución entera, puede suceder que $z = y + k_1 x = a + k_2 b$ sea negativa y entonces $U_x(y), U_b(a)$ se intersectarían en $\mathbb{Z}$, pero queremos que se intersecten en $\mathbb{N}$. Para lograr esto basta sumar a cada miembro de la ecuación $y + k_1 x = a + k_2 b$ el término bmx con m un natural suficientemente grande para que $y + (k_1 + mb)x = a + (k_2 + mx)b$ sea un número natural. ∎

Terminemos de probar que β es una base. Sean $U_x(y) \in \beta$ y $U_b(a) \in \beta$ no disjuntos. Sea $z \in U_x(y) \cap U_b(a)$, entonces $z = y + k_1 x = a + k_2 b$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Observemos que $z \in U_{[x,b]}(z)$. Afirmamos que $U_{[x,b]}(z) \subset U_x(y) \cap U_b(a)$. Sea $z + k_3[x, b] \in U_{[x,b]}(z)$. Luego,

$$\begin{aligned} z + k_3[x,b] = y + k_1 x + k_3[x,b] &= y + \left(k_1 + \frac{k_3[x,b]}{x}\right)x \in U_x(y), \\ = a + k_2 b + k_3[x,b] &= a + \left(k_2 + \frac{k_3[x,b]}{b}\right)b \in U_b(a). \end{aligned}$$

Para concluir que $U_{[x,b]}(z)$ es un abierto en β que está contenido en la intersección $U_x(y) \cap U_b(a)$ es necesario establecer que $(z, [x, b]) = 1$.

Lema 2: *Si $z \in U_x(y) \cap U_b(a)$, entonces $(z, [x, b]) = 1$.*

Demostración. Dada la igualdad $z = y + k_1 x$, los divisores comunes de z y x también lo son de y. Como $(x, y) = 1$, concluimos que $(z, x) = 1$. De igual manera $(z, b) = 1$. De aquí que $(z, xb) = 1$ y como $[x, b] | xb$, tenemos que $(z, [x, b]) = 1$. De esta forma hemos probado que $U_{[x,b]}(z) \in \beta$. Por lo tanto β es una base. ∎

1) X es Hausdorff. Sean $a, c \in \mathbb{N}$, $a \neq c$. Entonces $(ac + 1, ac + 1)$ no divide a $c - a$. Por el lema 1, $U_{ac+1}(a) \cap U_{ac+1}(c) = \emptyset$.

2) X es conexo. Aquí resalta el por qué de la condición $(a, b) = 1$ en la definición de $U_b(a)$, ya que de otra forma X no sería conexo, pues se podría separar en la siguiente forma:

$$X = U_2(1) \cup U_2(2).$$

Sean $U_x(y), U_b(a) \in \beta$. Veamos que $\overline{U_x(y)} \cap \overline{U_b(a)} \neq \emptyset$. Afirmamos que $dk \in \overline{U_d(c)}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $U_d(c) \in \beta$. Sea $U_p(q) \in \beta$ tal que

$dk \in U_p(q)$, es decir, $dk = q + pk'$. Entonces $(d,p) = 1$ ya que de otra forma $(p,q) \neq 1$. Por lo tanto, $(d,p)|c - q$. Por el lema 1, $U_d(c) \cap U_p(q) \neq \emptyset$. De aquí se sigue que $dk \in \overline{U_d(c)}$. Por lo tanto, $\overline{U_x(y)} \cap \overline{U_b(a)} \neq \emptyset$ ya que bx está en ambos conjuntos.

Para ver que X es conexo, supongamos lo contrario, escribamos $X = H \cup K$ con H y K abiertos y cerrados en X tales que $H \neq \emptyset \neq K$ y $H \cap K = \emptyset$. Como β es una base y H y K abiertos en X, entonces existen básicos $U_x(y) \subset H$ y $U_b(a) \subset K$. Además como H, K son cerrados en X, entonces $\overline{U_x(y)} \subset H$, $\overline{U_b(a)} \subset K$, y $\overline{U_x(y)} \cap \overline{U_b(a)} \subset H \cap K = \emptyset$. Entonces $\overline{U_x(y)} \cap \overline{U_b(a)} = \emptyset$. Esta contradicción prueba que X es conexo.

3) X no es localmente conexo.

Para probar esto vamos a exhibir un punto y un abierto de X que lo contiene, tal que no existe otro abierto contenido en él, que contenga al punto dado y que sea conexo.

Consideremos $U_2(1) = \{1, 3, 5, \ldots\}$, la cual es una vecindad de 1.

Si X fuera localmente conexo, existiría un abierto conexo $\emptyset \neq H \subset X$ tal que $1 \in H \subset U_2(1)$. Observemos que ningún abierto de la forma $U_{2b}(1)$ es conexo, ya que $U_{2b}(1) = U_{4b}(1) \cup U_{4b}(2b+1)$,

$$U_{4b}(1) \cap U_{4b}(2b+1) = \emptyset, \qquad (4b, 1) = 1 = (4b, 2b+1).$$

En particular si $b = 1$, $U_2(1) = U_4(1) \cup U_4(3)$. Como H es conexo y $1 \in H$, entonces $H \subset U_4(1)$, pero $U_4(1) = U_8(1) \cup U_8(5)$, por lo tanto $H \subset U_8(1)$. De esta manera obtenemos que H está contenido en cada término de la sucesión:

$$U_2(1) \supset U_4(1) \supset U_8(1) \supset U_{16}(1) \supset \cdots \quad .$$

Por lo tanto $H \subset \cap_{n \in \mathbf{N}} U_{2^n}(1) = \{1\}$, lo cual contradice que $H \neq \emptyset$ y H es abierto. No olvidemos que $\{1\}$ es cerrado ya que X es Hausdorff y no puede ser abierto ya que X es conexo.

Bibliografía

[1] Guillemin, V., A. Pollack, *Diffential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
[2] Kelly, J. L., *General Topology*, Princeton, N.J. Van Nostrand, 1955.
[3] Kosniowski, C., *Topología algebraica*, Editorial Reverté, S. A., 1992.
[4] Moise, E. E., *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York, 1977.
[5] Steen, S. L. A., J. A. Seebach, Jr, *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag, 1978.